JULIA STREIT-LEHMANN,
JESSICA HOTH (HRSG.)

DIAGNOSTIZIEREN UND FÖRDERN MATHEMATISCHER BASISKOMPETENZEN

THEORIE, EMPIRIE UND SCHULISCHE PRAXIS

FESTSCHRIFT FÜR ANDREA PETER-KOOP

BIELEFELD UNIVERSITY PRESS

Julia Streit-Lehmann und Jessica Hoth (Hrsg.)
Diagnostizieren und Fördern mathematischer Basiskompetenzen
Theorie, Empirie und schulische Praxis

Festschrift für Andrea Peter-Koop

BIELEFELD UNIVERSITY PRESS

Dr. Julia Streit-Lehmann ist Oberstudienrätin im Hochschuldienst am Institut für Didaktik der Mathematik an der Universität Bielefeld und hat 2021 bei Andrea Peter-Koop im Bereich Frühe mathematische Förderung promoviert. Ihre weiteren Arbeitsschwerpunkte sind Diagnostik und Förderung bei Rechenschwierigkeiten sowie hochschuldidaktische Themen. Sie engagiert sich seit 2013 in der Region OWL in der Fortbildung von Lehrkräften und sozialpädagogischen Fachkräften zum Thema Rechenschwierigkeiten und war Mitautorin der Neuauflage des EMBI „Zahlen und Operationen".

Prof. Dr. Jessica Hoth ist Professorin für Mathematikdidaktik mit dem Schwerpunkt Primarstufe an der Universität Rostock. Einer ihrer Forschungsschwerpunkte ist die diagnostische Kompetenz von angehenden und praktizierenden Mathematiklehrkräften. Darüber hinaus ist sie Projektleitung für den Primarstufenteil des Mathe.Kind Projekts an der Goethe-Universität, das sich mit der Diagnose und Förderung von Kindern mit Schwierigkeiten beim Mathematiklernen beschäftigt, ebenso wie für den Primarstufenteil des Projekts a² zur Diagnose und Förderung von mathematischen Basiskompetenzen von Lehramtsstudierenden zu Studienbeginn.

Julia Streit-Lehmann und Jessica Hoth (Hrsg.)

Diagnostizieren und Fördern mathematischer Basiskompetenzen

Theorie, Empirie und schulische Praxis

Festschrift für Andrea Peter-Koop

BIELEFELD UNIVERSITY PRESS

„Diese Publikation wurde realisiert mit freundlicher Unterstützung durch die Universität Bielefeld und die Fakultät für Mathematik, sowie durch den Publikationsfonds der Universitätsbibliothek Bielefeld“

Bibliographic information published by the Deutsche Nationalbibliothek
The Deutsche Nationalbibliothek lists this publication in the Deutsche Nationalbibliografie; detailed bibliographic data are available in the Internet at https://dnb.dnb.de/

First published in 2025 by Bielefeld University Press, Bielefeld
www.bielefelduniversitypress.de

Umschlagsgestaltung: Nina Michler, Bielefeld
Satz: Leon Pöhler, Bielefeld
Druck: Mediaprint Solutions GmbH, Paderborn

Print-ISBN: 978-3-69129-010-3
PDF-ISBN: 978-3-69129-011-0
https://doi.org/10.64136/igbb3218

Inhalt

DIAGNOSTIZIEREN UND FÖRDERN
MATHEMATISCHER BASISKOMPETENZEN
THEORIE, EMPIRIE UND SCHULISCHE PRAXIS
FESTSCHRIFT FÜR ANDREA PETER-KOOP

TEIL II
EMPIRISCHE BEFUNDE ZU MATHEMATISCHEN BASISKOMPETENZEN

TEIL III
MATHEMATISCHE BASISKOMPETENZEN IN DER SCHUL- UND UNTERRICHTSPRAXIS

Mathematische Basiskompetenzen erkennen und fördern

Vorwort zur Festschrift für Andrea Peter-Koop

Julia Streit-Lehmann & Jessica Hoth

Mathematische Basiskompetenzen sind nicht zuletzt aufgrund des immer wieder hohen Anteils an Schülerinnen und Schülern, die in großen Vergleichsstudien nur die unteren Kompetenzstufen erreichen, seit einiger Zeit ein wesentlicher Schwerpunkt der Diskussion in Fachdidaktik und Bildungspolitik (SWK, 2022; Reiss et al., 2019 für eine Übersicht über die Ergebnisse der PISA Studie; Stanat et al., 2019 zum IQB Bildungstrend). Sie stellen die notwendigen Voraussetzungen für ein erfolgreiches Mathematiklernen in der Grundschule und darüber hinaus dar und sollen die Lernenden zur Teilhabe am gesellschaftlichen Leben befähigen (Drüke-Noe et al., 2011). Aufgrund der zentralen Bedeutung, die den Basiskompetenzen zukommt, müssen Lehrkräfte möglichst frühzeitig erkennen, ob ihre Schülerinnen und Schüler über die für den jeweiligen Bildungsabschnitt relevanten Basiskompetenzen verfügen und diese ggf. gezielt fördern (Häsel-Weide & Nührenbörger, 2025). Trotz der besonderen Bedeutung mathematischer Basiskompetenzen und der damit verbundenen Aufmerksamkeit ist dieses Konstrukt bislang nicht hinreichend begrifflich geklärt. Es werden unter anderem Bezeichnungen wie „basale mathematische Kompetenzen“ (SWK, 2022), „Vorläuferfähigkeiten“ (Krajewski & Schneider, 2006), „numerische Basiskompetenzen“ (Gaupp et al., 2004) oder „mathematische Basiskompetenzen“ (Krajewski & Ennemoser, 2013; Ehlert et al., 2013) verwendet (um nur eine Auswahl zu nennen), ebenso wie unterschiedliche Konzeptualisierungen.

Der Begriff Vorläuferfähigkeiten bezieht sich typischerweise auf Kompetenzen, die bereits vor dem formalen Schuleintritt erworben werden und als Prädiktoren für spätere Mathematikleistungen dienen. Beispiele hierfür sind Mengenvorwissen, Zählfertigkeit und das Zahlverständnis (Krajewski & Schneider, 2006). Basale Kompetenzen im Sinne des SWK-Gutachtens sind breiter gefasst und umfassen notwendige „Verstehensgrundlagen für das Mathematiklernen, die für alle Inhaltsbereiche der Mathematik relevant sind“ (SWK, 2022, S. 51). Der Begriff mathematische Basiskompetenzen bezieht sich nach Ennemoser et al. (2011, S. 229) „üblicherweise auf grundlegende Phasen der mathematischen Kompetenzentwicklung und dient als eine Art Sammelbegriff für basale Voraussetzungen, die ein Kind mitbringen muss, um für die Anforderungen im Mathematikunterricht hinreichend gewappnet zu sein“. Heute, fast 15 Jahre nach Erscheinen dieses Zitats, kann festgestellt werden, dass sich eine übliche Begriffsverwendung, anders als etwa bei den Vorläuferfähigkeiten, bislang nicht hat durchsetzen können. Den mathematischen Basiskompetenzen liegen je nach Quelle ähnliche, aber unterschiedliche Konzeptualisierungen zugrunde, und es gibt Überschneidungen zu den Vorläuferfähigkeiten, wobei basale mathematische Kompetenzen bzw. mathematische Basiskompetenzen eher phasenunabhängig definiert sind und in diesem Sinne die Vorläuferfähigkeiten umfassen können. In vielen Konzeptualisierungen ist ein deutlich arithmetischer Fokus erkennbar, wenngleich zunehmend auch andere Inhalts- und Kompetenzbereiche wie die Geometrie oder visuelle Wahrnehmung in den Blick genommen werden (SWK, 2022; Peter-Koop et al., 2020).

Die Ständige Wissenschaftliche Kommission der Kultusministerkonferenz nimmt eine ähnlich stark curricular geprägte Perspektive wie Ennemoser et al. ein und definiert basale mathematische Kompetenzen als „diejenigen Verstehensgrundlagen, ohne die ein erfolgreiches, nachhaltig verständiges und weiterführendes Mathematiklernen im Mathematikunterricht nicht möglich ist“ (SWK, 2022, S. 50). Dabei werden diese Kompetenzen über alle Bildungsbereiche hinweg – Elementar-, Primar- und Sekundarbereich – kontinuierlich aufgebaut und beziehen sich nicht ausschließlich auf die Phase des schulischen Mathematiklernens. Inhaltlich wird beispielsweise ein gesichertes Stellenwertverständnis als eine basale Kompetenz identifiziert (ebd.); auch das Abzählen von Mengen und das Lesen von Zahlsymbolen finden sich in vielen Auflistungen. Forschungsbefunde konnten die prädiktive Bedeutung bestimmter Basiskompetenzen nachweisen (u. a. Peter-Koop & Kollhoff, 2015; Aunola et al., 2004; Jordan et al., 2009; Krajewski & Schnieder, 2006; Fritz et al., 2018) und zeigen starke Abhängigkeiten für ein erfolgreiches Mathematiklernen. In welchem Verhältnis prozessbezogene Kompetenzen und Basiskompetenzen zueinander stehen, ist vergleichsweise unklar.

Andrea Peter-Koop hat einen ihrer wichtigsten Arbeitsschwerpunkte dem Diagnostizieren und Fördern von mathematischen Basiskompetenzen gewidmet. Hierfür hat sie sich einerseits in der Forschung engagiert (für einen Einblick: Peter-Koop & Grüßing, 2008; Peter-Koop & Kollhoff, 2015) und konnte dadurch zu der zentralen Erkenntnis beitragen, dass das Verständnis und die Fähigkeiten von Kindern ungefähr zum Zeitpunkt der Einschulung in Bezug auf Zahlen und Zählen wichtige Prädiktoren für den späteren Schulerfolg sind. Sie konnte unter anderem zeigen, dass die Kinder, die am Ende der ersten Klasse als leistungsschwach in Mathematik eingestuft wurden, auch schon vor der Einschulung weniger Kenntnisse und Fähigkeiten zeigten als ihre Mitschülerinnen und Mitschüler. Da es Andrea Peter-Koop neben qualitativ hochwertiger und substanzieller Forschung immer ein Anliegen war, andererseits den Transfer in die Praxis sicherzustellen, liegen viele ihrer Arbeiten in der Entwicklung konkreter

Diagnose- und Fördermaterialien für den Einsatz in Schule und Kita. Ganz zentral ist hierbei die Entwicklung des ElementarMathematischen BasisInterviews (EMBI; Peter-Koop et al., 2008; Flottmann et al., 2021), das mittlerweile für unterschiedliche Inhaltsbereiche (Zahlen & Operationen; Größen & Messen; Raum & Form) und mit konkretem Fördermaterial vorliegt (Streit-Lehmann et al., 2022). Durch die Entwicklung der Eingangsdiagnose (Peter-Koop et al., 2020) fokussiert Andrea Peter-Koop insbesondere die mathematischen Basiskompetenzen und ihre effektive Diagnostik als Screening-Verfahren. Weitere Arbeiten zum Transfer in die Praxis sind die vielen Veröffentlichungen in Praxiszeitschriften für die Grundschule bzw. die Übergänge in die Grundschule (siehe unter anderem Peter-Koop, 2016 & 2017) oder für die Lehrkräfteausbildung (Faix, Peter-Koop & Wild, 2023), konsequent auch aus internationaler Perspektive.

Vor diesem Hintergrund streben wir mit dieser Festschrift an, einen Beitrag zu diesem relevanten Bereich zu leisten, an die genannten zentralen Arbeiten anzuschließen und das Feld zu systematisieren. Im vorliegenden Band wird daher zunächst die theoretische Grundlegung des Konstrukts mathematische Basiskompetenzen diskutiert (Teil I). Aktuelle empirische Ergebnisse rund um das Diagnostizieren und Fördern von mathematischen Basiskompetenzen werden in Teil II des Bandes berichtet. Teil III fokussiert praktische Beiträge, Implikationen und konkrete Vorschläge für den Mathematikunterricht bzw. die Ausbildung von (angehenden) Mathematiklehrkräften mit der Perspektive auf mathematische Basiskompetenzen. Durch die Dreiteilung der Festschrift wollen wir den Schwerpunkten in Andrea Peter-Koops Arbeit begegnen: einer substanziellen theoretischen Fundierung, Evidenz aus empirischer Forschung und dem Transfer in die Bildungspraxis. Dazu haben Kolleginnen und Kollegen beigetragen, wie im Folgenden vorgestellt wird.

Im ersten Beitrag des ersten Teils diskutieren Marco Ennemoser und Kristin Krajewski das definitorische Durcheinander zu dem Konstrukt der mathematischen Basiskompetenzen aus psychologischer Perspektive. Dabei geben sie einen Überblick über verschiedene Disziplinen und Begriffsbestimmungen und machen einen Definitionsvorschlag, der – anders als im Verständnis der Mathematikdidaktik – weniger auf inhaltsbezogene Kompetenzen Bezug nimmt, sondern Analogien zur Sprachentwicklung heranzieht. Im zweiten Beitrag betonen Karina Höveler und Miriam M. Lüken die Bedeutung der Muster- und Strukturierungskompetenzen für den Erwerb von mathematischen Basiskompetenzen. Sie plädieren dafür, eine Haltung zum Suchen von Mustern zu entwickeln, und schlagen konkrete Fördermöglichkeiten zur Ausbildung der Muster- und Strukturierungskompetenzen vor. Im dritten Beitrag betrachtet Holger Schäfer den Erwerb mathematischer Basiskompetenz im Zusammenhang mit intellektueller Beeinträchtigung und diskutiert eine Neuausrichtung der Mathematik für Lernende im sonderpädagogischen Schwerpunkt Geistige Entwicklung basierend auf fünf Thesen. Sebastian Kollhoff nimmt mit den „Zehnerfreunden“ im vierten Beitrag eine besonders prominente Basiskompetenz in den Blick und arbeitet am Beispiel einer Fördersituation Hürden bei der Erarbeitung von Zahlzerlegungen und die Besonderheiten des Einsatzes von Anschauungsmitteln heraus. Yasmin Theile, Raja Herold-Blasius und Benjamin Rott diskutieren im fünften Beitrag die Bedeutung der Prozesskompetenz Problemlösen im Kontext mathematischer Basiskompetenzen und konkretisieren anhand eines Fallbeispiels, wie Lehrkräfte die Problemlöseprozesse von Schülerinnen und Schülern mithilfe von Feedbackstrategien effektiv begleiten können. Sebastian Rezat schließt Teil I des Bandes ab und setzt die mathematischen Basiskompetenzen in Beziehung zum algebraischen Denken im Übergang Grundschule-Sekundarstufe.

Teil II wird eröffnet mit einem mehrperspektivischen Blick auf Förderung: In dem Beitrag von Christiane Benz, Dagmar Bönig, Hedwig Gasteiger und Kerstin Gerlach werden empirische Befunde zur Förderung speziell arithmetischer Basiskompetenzen im Elementarbereich berichtet. Im zweiten Beitrag stellen Pia Kerstingjohänner, Julia Streit-Lehmann und Jessica Hoth vermeintliche empirische Gewissheiten zu der Basiskompetenz Abzählen auf den Prüfstand. Petra Scherer und Jennifer Bertram fassen im dritten Beitrag von Teil II Forschungsergebnisse zur Diagnose und Förderung des Stellenwertverständnisses – einer zentralen Basiskompetenz – zusammen und analysieren Erprobungen einzelner Aufgaben im Rahmen von Partnerinterviews aus dem Projekt MaCo. Thomas Rottmann und Mia Lene Ransiek widmen sich anschließend ebenfalls einem Aspekt des Stellenwertverständnisses und vergleichen im vierten Beitrag die Fähigkeiten von dänischen und deutschen Schülerinnen und Schülern hinsichtlich der Übersetzung zwischen verschiedenen Zahldarstellungen. Sie stellen dabei fest, dass in der Gruppe der dänischen Kinder trotz gleicher Zahlwortbildungsregeln weniger Zahlendreher auftreten als in der Stichprobe der deutschen Kinder. Der fünfte und der sechste Beitrag fokussieren die Möglichkeiten, Diagnose und Förderung von Basiskompetenzen in der Lehrkräfteausbildung zu thematisieren. Hierzu stellen Jessica Hoth, Philipp Larmann, Lukas Knorr und Matthias Ludwig einerseits ein Seminarkonzept vor und analysieren andererseits basierend auf den Daten von teilnehmenden Studierenden die Auswirkung von der Arbeit mit Kindern mit besonderen Schwierigkeiten auf die Entwicklung von Einstellungen zum Lehren und Lernen von Mathematik. Im anschließenden Beitrag nehmen Meike Grüßing, Ilka Burhorst und Nina Engel dabei speziell fachfremd Studierende in den Blick und stellen Angebote vor, mit denen deren diagnostische Kompetenzen verbessert werden können.

In Teil III, in dem schul- und unterrichtspraktische Aspekte im Vordergrund stehen, stellen Jana Schiffer, Janina Lenhart, Marcus Nührenbörger, Larissa Aust, Andrea Baldus, Luise Eichholz, Celine Linker und Ben Weiß zunächst verschiedene Assessment-Formen vor, die bei der Fortbildung von Lehrkräften im Projekt FÖDIMA zum Einsatz kommen, und evaluieren deren Wirksamkeit einerseits auf der Ebene der Lehrkräfte aber auch mit Blick auf die Entwicklung mathematischer Kompetenzen von Lernenden. Im zweiten Beitrag geben Nina Flottmann und Julia Streit-Lehmann Einblick in ein systematisch gestuftes Förderkonzept, das in einem inklusiven Grundschulverbund auf die Entwicklung mathematischer Basiskompetenzen abzielt. Steffen Dingemans, Donatus Coerdt, Jörg Franks, Timo Maßmann und Thomas Rottmann arbeiten im dritten Beitrag die Rolle des Schulbuchs für die Gestaltung eines adaptiven Mathematikunterrichts heraus und zeigen auf, wie diagnostische Informationen zu Vorläuferfähigkeiten in diesem Zusammenhang genutzt werden können. Im vierten Beitrag liefert Bernd Wollring einen Einblick in die Entwicklung diagnosebasierter adaptiver Rückmeldungen zu Begründungsaufgaben. Teil III wird abgeschlossen mit einem Beitrag von Julia Streit-Lehmann, Wibke Patsch und Monika Rammert über Gelingensbedingungen des Kooperationsprojekts PReSch aus systemischer Perspektive, in dem Lehrkräfte und sozialpädagogische Fachkräfte in der Diagnose und Förderung mathematischer Basiskompetenzen am Schulanfang fortgebildet werden.

Wir danken allen Autorinnen und Autoren für ihren Beitrag zu dieser Festschrift und dafür, dass sie das wichtige Forschungsfeld rund um mathematische Basiskompetenzen maßgeblich mitgestalten.

Bielefeld, Rostock, Juli 2025
Julia Streit-Lehmann und Jessica Hoth

Literaturverzeichnis

Aunola, K., Leskinen, E., Lerkkanen, M. K., & Nurmi, J. E. (2004). Developmental dynamics of mathematical performance from preschool to grade 2. *Journal of Educational Psychology, 96*(4), 699-713.

Drüke-Noe, C., Möller, G., Pallack, A., Schmidt, S., Schmidt, U., Sommer, N., & Wynands, A. (2011). *Basiskompetenzen Mathematik für den Alltag und Berufseinstieg am Ende der allgemeinen Schulpflicht.* Cornelsen.

Ehlert, A., Fritz, A., Arndt, D. & Leutner, D. (2013) Arithmetische Basiskompetenzen von Schülerinnen und Schülern in den Klassen 5 bis 7 der Sekundarstufe. *Journal für Mathematikdidaktik 34,* 237–263. https://doi.org/10.1007/s13138-013-0055-0

Ennemoser, M., Krajewski, K. & Schmidt, S. (2011). Entwicklung und Bedeutung von Mengen-Zahlen-Kompetenzen und eines basalen Konventions- und Regelwissens in den Klassen 5 bis 9. *Zeitschrift für Entwicklungspsychologie und Pädagogische Psychologie, 43* (4), 228 - 242. doi: 10.1026/0049-8637/a000055.

Faix, A.-C., Peter-Koop, A., & Wild, E. (2023). Diagnostik, Förderung und Beratung bei Rechenschwäche: Wie können Selbstwirksamkeitsüberzeugungen angehender Lehrkräfte gesteigert werden? *Herausforderung Lehrer*innenbildung: Zeitschrift zur Konzeption, Gestaltung und Diskussion (HLZ), 6*(1), 130-145. https://doi.org/10.11576/hlz-6027

Flottmann, N., Streit-Lehmann, J., & Peter-Koop, A. (2022). *Elementar-Mathematisches BasisInterview (EMBI). Zahlen und Operationen. Handbuch Förderung.* Mildenberger.

Fritz, A., Ehlert, A. & Leutner, D. (2018) Arithmetische Konzepte aus kognitiv-entwicklungspsychologischer Sicht. *Journal für Mathematikdidaktik JMD,* 39, 7–41.

Gaupp, N., Zoelch, C., & Schumann-Hengsteler, R. (2004). Defizite numerischer Basiskompetenzen bei rechenschwachen Kindern der 3. und 4. Klassenstufe. *Zeitschrift Für Pädagogische Psychologie, 18*(1), 31–42. https://doi.org/10.1024/1010-0652.18.1.31

Häsel-Weide, U. & Nührenbörger, M. (2025) Unterrichtsintegrierte Förderung von mathematischen Basiskompetenzen. Empirische Rekonstruktion interferierender Praktiken der Förderung im Mathematikunterricht der Grundschule. *Zeitschrift für Grundschulforschung 18,* 49–66. https://doi.org/10.1007/s42278-025-00223-x

Jordan, N. C., Kaplan, D., Ramineni, C., & Locuniak, M. N. (2009). Early math matters: Kindergarten number competence and later mathematics outcomes. *Developmental Psychology, 45*(3), 850-867.

Krajewski, K., & Ennemoser, M. (2013). Entwicklung und Diagnostik der Zahl-Größen-Verknüpfung zwischen 3 und 8 Jahren. In M. Hasselhorn, A. Heinze, W. Schneider, & U. Trautwein (Hrsg.), *Diagnostik mathematischer Kompetenzen.* Tests & Trends N.F. 11 (S. 41–65). Hogrefe.

Krajewski, K., & Schneider, W. (2006). Mathematische Vorläuferfähigkeiten im Vorschulalter und ihre Vorhersagekraft für die Mathematikleistungen bis zum Ende der Grundschulzeit. *Psychologie in Erziehung und Unterricht,* 53(4), 246–262.

Peter-Koop, A. (2016). „Zahlen bitte!" Zur Bedeutung numerischer Kompetenzen für das Rechnenlernen. *Lernen konkret. Bildung im Förderschwerpunkt geistige Entwicklung,* 35(4), 6-9.

Peter-Koop, A. (2017). Prävention von Rechenschwierigkeiten. Vorläuferfähigkeiten als unverzichtbare Voraussetzung. *Mathematik differenziert,* 7(2), 6-9.

Peter-Koop, A., & Grüßing, M. (2008). Effekte vorschulischer mathematischer Förderung am Ende des ersten Schuljahres: Erste Befunde einer Längsschnittstudie . *Zeitschrift für Grundschulforschung, 1*(1), 65-82.

Peter-Koop, A., Kerstingjohänner, P., & Streit-Lehmann, J. (2020). *Handbuch zur Eingangsdiagnose (Welt der Zahl).* Westermann.

Peter-Koop, A., & Kollhoff, S. (2015). Transition to school: Prior to school mathematical skills and knowledge of low-achieving children at the end of grade 1. In B. Perry, A. MacDonald, & A. Gervasoni (Eds.), *Early mathematics learning and development. Mathematics and transition to school. International perspectives* (pp. 65–83). Springer. https://doi.org/10.1007/978-981-287-215-9_5

Peter-Koop, A., Wollring, B., Spindeler, B., & Grüßing, M. (2008). *Das elementarmathematische Basisinterview: EMBI - Zahlen und Operationen* (1. Aufl.). Mildenberger.

Stanat, P., Schipolowski, S., Mahler, N., Weirich, S. & Henschel, S. (Hrsg.). (2019). *IQB-Bildungstrend 2018. Mathematische und naturwissenschaftliche Kompetenzen am Ende der Sekundarstufe I im zweiten Ländervergleich.* Waxmann.

Ständige Wissenschaftliche Kommission der Kultusministerkonferenz (SWK). (2022). *Basale Kompetenzen vermitteln – Bildungschancen sichern. Perspektiven für die Grundschule.* KMK.

Streit-Lehmann, J., Flottmann, N.-C., & Peter-Koop, A. (2022). *Elementar Mathematisches Basis Interview. Zahlen und Operationen. Handbuch Förderung*. Mildenberger.

Teil I

Mathematische Basiskompetenzen im theoretischen Diskurs: Klärungsversuche und Weiterentwicklungen

Mathematische Basiskompetenzen: Plädoyer für eine einheitliche Definition über alle Bildungsabschnitte hinweg

Marco Ennemoser & Kristin Krajewski

Abstract

Im vorliegenden Kapitel schlagen wir vor mathematische Basiskompetenzen über alle Bildungsabschnitte hinweg einheitlich als Beherrschung der mathematischen Sprache und Notation zu definieren. Ausgangspunkt hierfür ist die bisherige Vielfalt unterschiedlichster Definitionsansätze, die ebenso widerspruchs- und diskussionslos nebeneinanderstehen wie etablierte Entwicklungsmodelle. Dies obwohl sich letztere in ihren Grundannahmen und Implikationen viel deutlicher unterscheiden als es im wissenschaftlichen Diskurs wahrgenommen wird. Vor diesem Hintergrund werden wir in einem ersten Schritt die Entwicklung des Zahlverständnisses im Sinne des Modells der Zahl-Größen-Verknüpfung (ZGV-Modell) darstellen und dabei im Detail die häufig übersehenen Unterschiede zu anderen Modellkonzeptionen herausarbeiten. Im zweiten Schritt werden wir das Konzept des Konventions- und Regelwissens (KRW) näher beleuchten, das zu einem bestimmten Zeitpunkt in der Entwicklung immer mehr an Bedeutung gewinnt. Dies sind aus unserer Sicht die beiden Kernkomponenten, aus denen sich mathematische Basiskompetenzen konstituieren. Im Anschluss werden wir einige Parallelen zur Sprachentwicklung und zur Textverstehensforschung herstellen, die unsere Sicht begründen, bevor wir abschließend auf einige diagnostische und didaktische Implikationen eingehen.

Zahlverständnis, Konventions- und Regelwissen, mathematische Notation, Simple View of Mathematics, Übung und Routinisierung, mathematische Sprache

Definitorisches Durcheinander: Was sind mathematische Basiskompetenzen?

Es besteht ein breiter Konsens, dass mathematische Basiskompetenzen für die Kompetenzentwicklung in Mathematik und für die Teilhabe an der Gesellschaft von zentraler Bedeutung sind. Allerdings gehen die Vorstellungen darüber, welche Fähigkeiten und Fertigkeiten unter diesen Begriff zu fassen sind, weit auseinander. Ein Grund für den definitorischen Mangel ist sicher darin zu sehen, dass dieser Begriff auf ganz unterschiedliche Altersgruppen und Bildungsabschnitte angewendet wird, die von der Geburt bis ins Erwachsenenalter reichen. Hinzu kommt, dass der Begriff aus den Perspektiven verschiedener Disziplinen unterschiedlich interpretiert wird. Die diversen Definitionsansätze sollen hier nicht im Detail diskutiert werden. Insgesamt reichen die Vorstellungen von der intuitiven Mengenunterscheidung im Säuglingsalter (vgl. Krajewski, 2003) über die Beherrschung des Grundschulstoffes (Moser-Opitz, 2005) bis hin zu solchen mathematischen Kompetenzen, die in der Sekundarstufe vermittelt werden und „über die alle Schülerinnen und Schüler am Ende der Pflichtschulzeit für eine aktive Teilhabe an der Gesellschaft mindestens und dauerhaft verfügen sollten“ (Drüke-Noe et al., 2011, S. 210). Ein Ziel des vorliegenden Kapitels besteht darin, eine einheitliche Definition mathematischer Basiskompetenzen vorzuschlagen, die aus unserer Sicht über die gesamte Lebensspanne hinweg tragfähig ist.

Der Irrweg oberflächlicher Theorievergleiche

In der Literatur existiert nicht nur eine Vielfalt von Definitionen, sondern es finden sich auch verschiedene theoretische Modelle der mathematischen Kompetenzentwicklung. Ein Problem ist darin zu sehen, dass diese in der Literatur nicht systematisch kontrastiert werden. Stattdessen werden vor allem augenscheinliche Ähnlichkeiten wahrgenommen und es wird ein Konsens festgestellt, den es bei genauer Betrachtung gar nicht gibt. Wir halten die selektive Konzentration auf augenscheinliche Gemeinsamkeiten für den falschen Weg, der nicht nur den wissenschaftlichen Erkenntnisgewinn hemmt, sondern in weiten Teilen schlicht in die Irre führt.

Auch wenn wir die vorgeschlagenen Modelle zur Entwicklung mathematischer Kompetenzen an dieser Stelle nicht alle im Detail darstellen und diskutieren können, möchten wir zumindest die meistrezipierten kurz ansprechen. Im deutschen Sprachraum haben sich drei solcher Modelle etabliert. Dazu zählt das *Modell der Zahl-Größen-Verknüpfung* (*ZGV)* von Krajewski, das seit seiner ersten Veröffentlichung vor fast 20 Jahren (Krajewski & Schneider, 2006) bis auf wenige sprachliche Nuancierungen unverändert geblieben ist (Krajewski & Ennemoser, 2013). Auch am *Modell der Entwicklung zahlenverarbeitender Fähigkeiten* von von Aster und Shalev (2007) wurden keine Änderungen vorgenommen, während die Darstellungen zur *Entwicklung mathematischer Kompetenzen* von Fritz und Ricken (2008) im Laufe der Zeit immer wieder modifiziert wurden. Vor 2006 waren ihre Vorstellungen noch stark an Fusons (1988) Zählentwicklung orientiert, in der Folgezeit auch am ZGV-Modell mit teils identischen bildlichen Darstellungen (Krajewski & Schneider, 2006; Fritz et al., 2007); später orientierten sich die Autorinnen wieder stärker an englischsprachigen Arbeiten. Leider führten die offensichtlichen Entlehnungen und die daraus resultierenden visuellen Ähnlichkeiten sowie die Verwendung ähnlicher (aber teils unterschiedlich verstandener) Begriffe zu dem Eindruck, dass die Modelle auch konzeptuell größere Überschneidungen hätten.

Das beschriebene Phänomen lässt sich anhand einer Arbeit von Fischer et al. (2017) illustrieren. Dort werden die drei oben genannten Modelle gegenübergestellt. Nachdem die Autor:innen die bloße Anzahl der jeweils definierten Entwicklungsstufen als nahezu einzigen Unterschied nennen (vor allem bezogen auf den Vergleich zwischen Krajewski und Fritz & Ricken), wird der Beschreibung augenscheinlicher Modellgemeinsamkeiten viel Raum gewidmet. Bei ihrem Abgleich der Modelle stützen sich die Autor:innen hauptsächlich auf die in den Beschreibungen verwendeten Begrifflichkeiten für relevante Einsichten und Entwicklungsschritte. Die augenscheinlichen Ähnlichkeiten werden als Indiz für einen wissenschaftlichen Konsens herangezogen. Dabei wird zum einen übersehen, dass die verwendeten Begriffe von den jeweiligen Autor:innen teilweise anders definiert werden (weshalb auch die versuchte Gleichsetzung von Modellebenen scheitert). Zum anderen bleibt gänzlich unberücksichtigt, dass sich die Modelle in wesentlichen Grundannahmen und Modellimplikationen unterscheiden, aus denen ersichtlich ist, dass ganz andere Vorstellungen darüber vorliegen, wie genau und in welcher zeitlichen Perspektive sich der Entwicklungsprozess vollzieht. Die fundamentalen Unterschiede bleiben im wissenschaftlichen Diskurs weitestgehend unberücksichtigt. Aus diesem Grund werden wir nach einem kurzen Abriss des ZGV-Modells versuchen, die Besonderheiten in dessen Annahmen und Implikationen herauszuarbeiten und diese von denen der anderen Modelle abzugrenzen. Dies zum einen, indem wir den betrachteten Entwicklungszeitraum über die gesamte Schullaufbahn erstrecken und zum anderen, indem wir die mathematische Kompetenzentwicklung aus dem Blickwinkel der Sprach- und Schriftspracherwerbsforschung beleuchten.

Zahl-Größen-Kompetenzen (ZGK)

Entwicklungsmodell der Zahl-Größen-Verknüpfung (ZGV-Modell): Vom Punktehaufen zum tiefen Zahlverständnis

Das ZGV-Modell (Krajewski, 2008; Krajewski & Schneider, 2006) beschreibt die zunehmende Verknüpfung von Zahlwörtern mit Quantitäten hin zu einem tiefen Zahlverständnis. Im Zuge der Modellentwicklung wurden die in diesem Prozess als relevant erachteten Kompetenzen von Krajewski ab 2003 zunächst als „Mengen- und Zahlenwissen“ bzw. „mengen- und zahlenbezogenes Vorwissen“ eingeführt. 2006 wurden sie im Entwicklungsmodell unter dem Begriff „Mengen-Zahlen-Kompetenzen“

neu strukturiert und erweitert, bis dieser 2013 durch den etwas weiter gefassten Begriff „Zahl-Größen-Kompetenzen" ersetzt wurde (vgl. Krajewski & Ennemoser, 2013). Damit sollte der Begriff *„Mengen"* für zunächst nicht abzählbare, also über Fläche und Volumen wahrgenommene Mengen erweitert werden auf *„Größen"*, um auch Quantitäten wie Zeit oder Masse (zunächst repräsentiert als sehr ungenau wahrgenommene/s Dauer/Gewicht) einzuschließen. Gemeint sind mit Größen also (nicht zwangsläufig abzählbare) *Quantitäten*.

Basisfertigkeiten (Ebene 1): Zahlwörter und Ziffern ohne Größenbezug

Angeborene nicht-numerische Größenunterscheidung: Babies können ab Geburt Quantitäten (Mengen/ Größen) ungenau anhand von Ausdehnung, Fläche, Dauer oder Gewicht, aber keine Anzahlen bzw. Stückzahlen unterscheiden. Sie können z. B. erkennen, dass ein Haufen aus 5000 Reiskörnern weniger ist als ein daneben befindlicher Haufen aus 20000 Reiskörnern. Auch eine Unterscheidung zwischen 4 und 2 gelingt – dies aber aus exakt denselben Gründen: allein durch Fläche und räumliche Ausdehnung, nicht anhand der Anzahl (2 Stück vs. 4 Stück). Denn diese Anzahlen sind für Säuglinge zunächst genauso wenig zählbar wie 5000.

Erwerb von Zahlwörtern, Zahlwortfolge und Ziffern ohne Größenbezug: Unabhängig davon beginnen Kinder ab etwa zwei Jahren Zahlwörter nachzuplappern, einzeln (z.B. „zwei", „hundert", „Million") oder in Folgen (z.B. „eins, zwei, drei, zehn") vorwärts, rückwärts oder weiter ab einer Zahl. Mit der Zeit schreiben sie ggf. auch schon Ziffernzahlen (z.B. 5 7 3). Was genau diese Zahlen oder auch Ziffern bedeuten, dass sie bestimmte Quantitäten beschreiben und welche genau das sind, haben sie aber noch nicht verstanden. Das müssen sie im Zuge eines längeren Prozesses erst nach und nach lernen.

Einfaches Zahlverständnis (Ebene 2): Zahlwort-Größen-Verknüpfung

Die Verknüpfung der beiden auf Ebene 1 noch voneinander unabhängigen Basisfertigkeiten stellt den wichtigsten Schritt zum Zahlverständnis dar. Diese Verknüpfung vollzieht sich in zwei Phasen.

Phase 2a) Unpräzise Größenrepräsentation von Zahlen (unpräzises Zahlverständnis). Zunächst verstehen Kinder, dass Zahlwörter irgendetwas mit Quantitäten zu tun haben. Sie lernen nach und nach, dass unterschiedliche Zahlwörter unterschiedliche Quantitäten repräsentieren, können diese aber zunächst nur grob verbalen Größenkategorien zuordnen und deshalb nicht präzise unterscheiden. So kann z.B. „zwei" der Größenkategorie „wenig" angehören, „zwanzig" mag eher mit dem Begriff „viel" assoziiert sein und „tausend" oder „eine Million" mit „sehr viel". Wegen der groben Zuordnung können nur Zahlen aus verschiedenen Größenkategorien, nicht aber eng beieinander liegende Zahlen aus derselben Größenkategorie bezüglich ihrer Größe unterschieden werden.

Phase 2b) Präzise Größenrepräsentation von Zahlen (Anzahlkonzept, Kardinalität, Numerosität, präzises Zahlverständnis). Dies wird erst jetzt möglich, wenn jedes einzelne Zahlwort eineindeutig mit einer exakten Menge bzw. Größe verknüpft wird. Erst jetzt wird klar, dass in der Zahlwortfolge aufsteigende Zahlen präzise ansteigende Quantitäten repräsentieren. Nun können z.B. Nachbarzahlen wie 13 und 14, viel später auch 354 und 355 oder gar 17436 und 17437 anhand ihrer Anzahl verglichen werden. Die gewählten Zahlenbeispiele dürften deutlich machen, dass diese Ebene einen Prozess beschreibt, der im kleinen Zahlenraum beginnt und sich über viele Jahre hinweg in immer weitere Zahlenräume erstreckt.

Mengen- bzw. Größenrelationen ohne Zahlbezug. Ganz unabhängig von den beiden skizzierten Phasen lernen Kinder, dass sich Mengen, Größen bzw. Quantitäten in Teile zerlegen und wieder zum Ganzen zusammensetzen lassen. Sie verfügen aber noch nicht über das erforderliche tiefe Zahlverständnis (siehe Ebene 3), um solche Vorgänge auf Zahlen zu übertragen und dabei sowohl die Teile als auch das Ganze numerisch quantifizieren zu können.

Tiefes Zahlverständnis (Ebene 3): Verknüpfung von Zahlwörtern mit Größenrelationen

Kinder lernen schließlich, dass Zahlwörter (und ggf. die zugehörigen Ziffern) nicht nur für sich selbst stehen, sondern auch Relationen repräsentieren können. Dieses Verständnis für Zahlrelationen umfasst zwei Aspekte, zunächst im kleinen und dann immer höheren Zahlenräumen.

Zerlegung und Zusammensetzung von Zahlen: Nachdem Kinder erst einmal verstanden haben, wie viel (Stück) genau eine bestimmte (An-)Zahl bedeutet, eröffnet das die Möglichkeit zu erkennen, dass diese (An-)Zahl in kleinere (An-)Zahlen zerlegbar ist bzw. sich aus diesen zusammensetzt.

Differenzen zwischen Zahlen: Kinder erkennen zudem, dass der Unterschied zwischen zwei Zahlen wieder eine Zahl ist. Diese Einsichten sind noch nicht gleichzusetzen mit dem Durchführen formaler Rechenoperationen auf Symbolebene, sie sind aber hierfür unabdingbare Voraussetzung.

Was ist anders am ZGV-Modell?

Im Folgenden gehen wir im Detail auf einige grundlegende Unterschiede des ZGV-Modells gegenüber anderen Modellkonzeptionen ein, die in der Literatur kaum Beachtung finden.

Minimalistische Kompetenzzuschreibungen

Das ZGV-Modell basiert auf dem Prinzip der minimalistischen Kompetenzzuschreibungen (Krajewski & Ennemoser, 2013). Das heißt, wenn ein Kind eine mathematische „Leistung" zeigt, führen wir diese ausschließlich auf solche Kompetenzen zurück, die für das Erbringen der Leistung mindestens erforderlich, das heißt zwingend notwendig und zugleich hinreichend sind. Auf diese Weise wird es konsequent vermieden, die Kompetenzen eines Kindes zu überschätzen. Tatsächlich resultieren die meisten der im Folgenden dargestellten Besonderheiten aus dieser Sichtweise.

Abweichende Verortungen in der Entwicklungssequenz. Der Grundsatz, dass dem Kind keine Kompetenzen unterstellt werden sollen, die möglicherweise gar nicht vorhanden sind, führt im Ergebnis dazu, dass gezeigte Leistungen im ZGV-Modell teils völlig anders in die angenommene Entwicklungssequenz eingeordnet werden als in anderen Modellen. So sprechen etwa Fritz und Ricken (2008) davon, dass Kinder durch ein zählendes Vorwärts- oder Rückwärtsgehen in der Zahlwortfolge bereits rechnen (ihre Stufe 2) und durch weiterzählen Kardinalitätsverständnis zeigen würden (ihre Stufe 3). Das Entlanghangeln an der Zahlwortfolge erlaubt jedoch nach unserer Auffassung (ähnlich wie das Aufsagen von Buchstabenfolgen aus dem ABC) keinen Rückschluss auf ein Kardinalitäts- oder gar Rechenverständnis, weshalb dies im ZGV-Modell auf der niedrigsten Stufe (Ebene 1) angesiedelt ist.

Kontinuierlich ablaufende Prozesse statt Aha-Erlebnisse

Kein angeborener Zahlensinn, keine angeborene Numerosität. Dem oben beschriebenen Prinzip folgend, geht das ZGV-Modell im Gegensatz zu sämtlichen anderen Theorien und Entwicklungsmodellen nicht von einem angeborenen Zahlensinn aus (vgl. Krajewski, 2003). Stattdessen wird die Auffassung vertreten, dass Säuglinge und kleine Kinder zwar zwischen der Ausdehnung und Fläche von Mengen (Ebene 1), aber noch nicht zwischen Stückzahlen unterscheiden können. Sie nehmen also keine Anzahlen (Numerositäten) wahr und sind auch nicht in der Lage „nonverbal" zu zählen (Subitizing). Bereits ältere Befunde aus Säuglingsstudien um die Jahrtausendwende ließen sich in diese Richtung interpretieren (Krajewski, 2008). Inzwischen wird die Annahme eines angeborenen „number sense" auch international zunehmend kritisch hinterfragt (z.B. Miravète et al., 2020).

Der Erwerbsprozess verläuft über ein unpräzises Zahlverständnis. Die Frage, ob es einen angeborenen Zahlensinn gibt oder nicht, mag auf den ersten Blick gar nicht sonderlich relevant erscheinen. Die Konsequenzen für unser Verständnis der mathematischen Kompetenzentwicklung sind jedoch enorm. Fehlt ein angeborener Zahlensinn, besteht die Entwicklungsherausforderung nicht lediglich darin, intuitiv bereits von Geburt an verstandene Anzahlen mit zugehörigen Labels (Zahlwörtern, Ziffern) zu verknüpfen.

Vielmehr muss ein Kind durch den Umgang mit Mengen erst die Anzahl von Elementen bzw. die „Stückzahligkeit“ als relevantes Unterscheidungsmerkmal entdecken. Dies ist keinesfalls trivial, da beim Vergleich zweier Mengen eine ganze Reihe anderer Merkmale, wie etwa Größe, Farbe und Form der enthaltenen Elemente, evtl. auch ihr vermuteter Geschmack etc., um die Aufmerksamkeit des Kindes konkurrieren. Unter all diesen Merkmalen muss das Kind herausfiltern, dass sich Mengen auch im Hinblick auf so etwas wie die „Anzahl“ unterscheiden können. Mit der wachsenden Erkenntnis, dass für verschiedene Anzahlen verschiedene Bezeichnungen verwendet werden, erlernt das Kind nach und nach welche Bezeichnung zu welcher Anzahl gehört – und worin sich diese genau unterscheiden. Während andere Modelle diesen Prozess lediglich als Abfolge von plötzlichen Einsichten im Sinne von Aha-Erlebnissen beschreiben (z.B. Seriation, Kardinalität), richtet das ZGV-Modell den Blick auf den kleinschrittigen Erwerbsprozess, der zwischen diesen Einsichten liegt. Es vermittelt auf diese Weise ein sehr viel detaillierteres Verständnis des Entwicklungsverlaufs, insbesondere indem es das Konzept eines unpräzisen Zahlverständnisses einführt, das explizit berücksichtigt, dass zunächst nur eine grobe Vorstellung der jeweiligen Anzahl erworben wird, mit dem das Kind im Alltag vorläufig operieren kann und das sich erst im Zuge der weiteren Entwicklung nach und nach präzisiert.

Keine pauschale Verortung auf Niveaustufen

Andere Modellkonzeptionen gehen davon aus, dass ein Kind in seiner Entwicklung pauschal auf einer bestimmten Niveaustufe verortet werden kann. Es herrscht die Vorstellung, dass das Kind durch bestimmte Einsichten die nächsthöhere Stufe erklimmt und damit pauschal ein höheres Level der mathematischen Kompetenz erreicht hat. Häufig wird auch vom Durchlaufen eines „Nadelöhrs“ gesprochen (Fritz & Ricken, 2008). Im ZGV-Modell wird hingegen in Rechnung gestellt, dass die neu erworbenen Einsichten nicht automatisch auf andere Zahlenräume generalisieren. Stattdessen wird explizit berücksichtigt, dass sich Zahl-Größen-Kompetenzen auf allen drei Entwicklungsebenen über Jahre hinweg bis in hohe Zahlenräume weiterentwickeln. Zur vertikalen Entwicklungsperspektive (ein zunehmend tieferes Verständnis der Zahl-Größen-Verknüpfung) gesellt sich auf jeder Ebene eine horizontale Entwicklung in einen höheren Zahlenraum. Dementsprechend ist es auf Grundlage des ZGV-Modells unmöglich, ein Kind pauschal auf einer bestimmten Entwicklungsebene zu verorten, wie dies diagnostisch etwa von Fritz und Ricken (2008) vorgeschlagen wird. Denn die Zuordnung würde für unterschiedliche Zahlenräume oder Repräsentationsformen (verbal vs. symbolisch) variieren. Ein Kind kann möglicherweise im Zahlenraum bis 10 bereits verbal auf Ebene 3 operieren oder sogar auf Symbolebene formale Rechnungen durchführen, während es im Zahlenraum über 100 bestenfalls eine grobe Vorstellung von der Mächtigkeit einer Zahl hat, etwa dass 125 „viel mehr" sein muss als 10 (Ebene 2a). Ferner ist zu beachten, dass einzelne Kompetenzebenen in bestimmten Zahlenräumen zwar prinzipiell beherrscht werden können, aber noch nicht ausreichend routinisiert sind, um sich in verbesserten Leistungen niederzuschlagen (Krajewski & Ennemoser, 2013). Auch dieser Aspekt macht deutlich, dass das Fortschreiten eines Kindes in der Entwicklung in wesentlichen Teilen gradueller Natur und mit der Vorstellung qualitativ klar abgrenzbarer, lediglich nacheinander zu durchschreitender Entwicklungsstufen nicht kompatibel ist.

Jenseits der Zahl: Konventions- und Regelwissen (KRW)

Das ZGV-Modell definiert die Entwicklung mathematischer Basiskompetenzen als fortschreitende Verknüpfung von Zahlen mit Größen. Diesen Verknüpfungsprozess, den man weniger präzise auch schlicht als Entwicklung hin zu einem tiefen Zahlverständnisses bezeichnen kann, stellt ohne jeden Zweifel den Ausgangspunkt und wichtigsten Grundpfeiler für die mathematische Kompetenzentwicklung dar. Für den weiteren Entwicklungsverlauf schlagen Ennemoser et al. (2011) vor, die Definition von mathematischen Basiskompetenzen um das Konventions- und Regelwissen (KRW) zu erweitern. Dieses definieren sie als *Beherrschung der über die bloße Zahl(wort)- und Ziffernkenntnis hinausgehenden mathematischen Notation*. Das KRW umfasst die Beherrschung der verwendeten mathematischen Symbole, inklusive der Regeln, nach denen mathematische Zeichenfolgen abgearbeitet werden.

Das Konventions- und Regelwissen stellt bei genauerer Betrachtung eine logische Fortführung jener Entwicklung dar, die mit dem Verständnis der Zahlen – der ersten und wichtigsten Gruppe mathematischer Symbole – beginnt. Denn spätestens mit dem Schuleintritt werden Kinder neben Zahlwörtern auch mit den zugehörigen Ziffern und schließlich mit weiteren Symbolen konfrontiert, deren Bedeutung sie erlernen müssen. Dies sind zunächst Operatoren wie das Plus- und das Minuszeichen sowie Verhältniszeichen (=, <, >), wobei auch gelernt werden muss, dass die Symboldarstellung syntaktischen Regeln unterliegt (vgl. auch Arbeiten zur „mathematischen Orthografie", Douglas et al., 2020). Das anfangs kleine Repertoire an *mathematischen Symbolen und Verarbeitungsregeln* beginnt jenseits der Grundschule stetig anzuwachsen und nimmt dort schnell an Bedeutung zu. Zu den gängigsten Aspekten zählen etwa die korrekte Verarbeitung von Operatorenfolgen (Vorzeichen, Punkt-vor-Strich-Regel), die Berücksichtigung der Konventionen beim Rechnen mit Klammern, Dezimalstellen und Brüchen sowie das Verständnis von Wurzelzeichen und der Potenzschreibweise.

Abgrenzung zum Kalkül. Es ist offensichtlich, dass das KRW eine enge Nähe zum in der Mathematikdidaktik gebräuchlichen Begriff des *Kalküls* aufweist (z.B. Prediger, 2009). Allerdings bezieht sich Kalkülkompetenz vor allem auf die sequenzielle Abarbeitung potenziell auswendig gelernter und prinzipiell auch ohne Verständnis durchexerzierbarer Lösungsschritte (z.B. beim Auflösen einer Gleichung nach x). Das KRW erstreckt sich nicht auf auswendig gelernte Prozeduren, sondern es bezeichnet das Verständnis und die Beherrschung der in einer Aufgabe enthaltenen mathematischen Symbole.

Empirische Befunde zu ZGK und KRW

Zahlreiche Studien liefern stützende Evidenz für die Relevanz der oben skizzierten Basiskompetenzen. Wie aus verschiedenen Längsschnittstudien hervorgeht, stellen die im ZGV-Modell definierten Zahl-Größen-Kompetenzen im Vor- und Schuleingangsbereich den mit Abstand besten Prädiktor für die nachfolgende Entwicklung der mathematischen Schulleistungen dar. Darüber hinaus zeigen die Befunde einer ganzen Reihe von Trainingsstudien, dass diese Entwicklung durch früh einsetzende Präventionsmaßnahmen mittels einer ZGV-Modell-basierten Förderung langfristig begünstigt werden kann (Krajewski et al., 2007; für einen Überblick über Trainingsstudien siehe Ennemoser et al., 2024). Mit Blick auf spätere Bildungsabschnitte konnte zudem in mehreren Studien gezeigt werden, dass die oben beschriebenen Basiskompetenzen (ZGK im 3- bis 13-stelligen Zahlenraum sowie KRW) *auch im Verlauf der Sekundarstufe eng mit den schulischen Mathematikleistungen assoziiert* bleiben. Diese Zusammenhänge beschränken sich nicht auf Kinder mit Rechenschwierigkeiten oder Lernbeeinträchtigungen, sondern sie gelten gleichermaßen für die gymnasiale Sekundarstufe (Christl et al., 2025; Ennemoser & Krajewski, in Druck). Das ist insofern beeindruckend als diese Kompetenzen deutlich unter dem Niveau dessen liegen, was in der im Sekundarstufenbereich üblicherweise als Basiskompetenzen betrachtetet wird.

Mathematische Basiskompetenzen als Verständnis der mathematischen Sprache und Notation

Die zwei Säulen mathematischer Basiskompetenzen – Zahl-Größen-Kompetenzen sowie Konventions- und Regelwissen – können aus einer anderen Perspektive als Beherrschung der mathematischen Sprache und Notation verstanden werden (Ennemoser & Krajewski, 2013). Diesen Vorschlag für eine einheitliche Definition des Begriffs mathematische Basiskompetenzen werden wir im Folgenden anhand von Analogien zum Wortschatz- und Schriftspracherwerb näher begründen. Ferner leiten wir aus den Betrachtungen einen Ansatz ab, den wir in Anlehnung an ein bekanntes Modell aus der Leseforschung als *Simple View of Mathematics* bezeichnen.

Demzufolge resultiert mathematische Kompetenz aus einer multiplikativen Verknüpfung von Basiskompetenzen und „hierarchiehöheren" mathematischen Kompetenzen.

Abgrenzung zur natürlichen Sprache. Um Missverständnisse zu vermeiden, möchten wir klarstellen, dass wir mit mathematischer Sprache nicht etwa ein spezifisches sprachliches Register meinen, das im Mathematikunterricht verwendet wird und sich lediglich durch die zusätzliche Verwendung von Fachtermini oder bevorzugter grammatischer Strukturen von der natürlichen Sprache unterscheidet (Halliday, 1978). Wir beziehen uns vielmehr auf die Sprache der Mathematik als eigenständige Sprache, die über einen eigenen *Wortschatz* (u.a. Zahlwörter) und ein eigenes *schriftliches Symbolsystem* (Notation) mit einer effizienten Grammatik (Syntax) verfügt (Cajori, 1928).

Erwerb des Zahlwortverständnisses als Wortschatzerwerb

Wortschatzerwerb in der natürlichen Sprache. Zunächst möchten wir kurz die Parallelen zwischen dem Erwerb von Zahlwörtern und anderen Wörtern im mentalen Lexikon etwas genauer skizzieren. Basierend auf dem Prinzip der minimalistischen Kompetenzzuschreibung legt das ZGV-Modell nahe, dass das bloße Aussprechen eines Zahlworts nicht zwangsläufig bedeutet, dass ein Kind die genaue Bedeutung dieses Wortes versteht. Damit entspricht der Erwerb eines Zahlwortes dem Erwerb jedes anderen Wortes in unserem Vokabular. Wenn ein Kind ein neues Wort wie „Hund" zum ersten Mal hört oder verwendet, hat es in der Regel nur eine vage Vorstellung davon, was dieses Wort bedeutet (Bloom, 2000). Es muss die *genaue Bedeutung* des Wortes „Hund" (bzw. die damit verbundene mentale Repräsentation, also das eigene Verständnis davon) im Zuge von Erfahrungen mit seiner Umwelt *in einem fortschreitenden Prozess* des Vergleichens und Kategorisierens, des Testens und Verwerfens von Hypothesen immer weiter *ausdifferenzieren und präzisieren*. Im Rahmen dieses Prozesses baut das Kind nach und nach ein differenziertes Netzwerk von Merkmalen und Assoziationen auf, die wie Knotenpunkte miteinander verbunden sind und sein Verständnis des Wortes „Hund" konstituieren (vgl. Bloom, 2000). Dieser Prozess könnte damit anfangen, dass das Kind beim erstmaligen Hören eine Assoziation mit dem hüpfenden, kläffenden Etwas herstellt, das gelegentlich zu Besuch ist. Daran könnten weitere Assoziationen geknüpft werden, von denen einige potenziell auch schon vor dem Wort „Hund" mit diesem Etwas verbunden waren, wie z.B.: hat Beine, bellt, ist keine Katze, oder – später und zunehmend abstrakter – ist ein Tier, ein Lebewesen, davon gibt es verschiedene Rassen.

Erwerb des „Zahlwortschatzes". Ein ganz ähnlicher Entwicklungsprozess ist notwendig, um eine angemessene mentale Repräsentation eines Zahlworts zu erwerben (vgl. Ennemoser et al., 2024). Um beispielsweise ein tiefes Verständnis des Zahlworts „vier" zu entwickeln, müssen zahlreiche relevante

Merkmale und Assoziationen mit diesem Wort verknüpft werden – analog der im ZGV-Modell beschriebenen Entwicklung. Beispiele für solche Merkmale sind: ist eine Art Etikett, das oft verwendet wird, wenn Objekte nacheinander gezeigt werden (ZGV-Modell Ebene 1), wird oft zwischen den Wörtern „drei“ und „fünf“ gesagt (Ebene 1), hat irgendetwas mit Quantitäten zu tun (Ebene 2a), steht für „nicht sehr viel“ (Ebene 2a), ist weniger als hundert (Ebene 2a), ist mehr als drei und weniger als fünf (Ebene 2b), ist genau eins mehr als drei und eins weniger als fünf (Ebene 3; was übrigens nicht dasselbe ist wie einfach zu wissen, dass „vier“ oft zwischen „drei“ und „fünf“ gesagt wird, siehe oben), kann in „drei“ und „eins“ zerlegt werden (Ebene 3) und repräsentiert den Unterschied zwischen „zehn“ und „sechs“ (Ebene 3).

Die Darstellung spiegelt den im ZGV-Modell beschriebenen Prozess aus anderer Perspektive als natürlichen Bestandteil des Wortschatzerwerbs wider und macht deutlich, dass „das Zahlverständnis“ keine einmalige und früh zu erwerbende, konzeptuelle Einsicht darstellt. Vielmehr steckt dahinter der Aufbau eines „Zahlenwortschatzes“, der sich über viele Jahre hinweg erweitert und ausdifferenziert (horizontale Entwicklungsperspektive, siehe unten).

Vom Zahlwort zum „Satz“: Konventions- und Regelwissen

Allein mit Nomen lassen sich kaum sinnvolle Aussagen formulieren. Analog lässt sich allein mit Zahlen kein mathematisches Problem darstellen oder gar lösen. Daher müssen neben Zahlwörtern (und zugehörigen Ziffern) im Laufe der Entwicklung noch viele andere mathematische Wörter (sowie die zugehörigen Symbole) erworben werden. Während die ersten Zahlwörter meist noch unabhängig von den zugehörigen Ziffern erlernt (wenn auch zunächst noch nicht präzise verstanden) werden, werden die Bezeichnungen für Operatoren, Verhältniszeichen, Klammern usw. in aller Regel direkt mit der Einführung der zugehörigen Symbole vermittelt. Diese Symbole sind zwingend notwendig, um in der Sprache der Mathematik nicht nur (Zahl-)Wörter oder Ziffern benennen, sondern richtige „Sätze“ bilden und verstehen zu können (z.B. $3 + 5 = 8$). Zusammen mit dieser anderen Art von Symbolen erlernen Kinder auch gleich die zugehörige Syntax. Diese ist anfangs noch recht einfach, wird aber im Laufe der Zeit mit Klammern, Punkt-vor-Strichregeln, Bruchdarstellungen, Wurzeln und Potenzen immer komplexer. Im Übrigen gilt auch hier – analog zum Erwerb des Zahlwortschatzes – dass Kinder zunächst nur eine ungefähre Vorstellung davon entwickeln, was ein Symbol wie der Bruchstrich bedeutet. Auch hier werden die Einträge im Lexikon im Zuge der Auseinandersetzung mit der Umwelt mit Assoziationen angereichert (z.B. steht für „:“; eignet sich, um einen Anteil von etwas darzustellen etc.) und nach und nach immer präziser und differenzierter verstanden.

Vom Simple View of Reading zum Simple View of Mathematics

Analogien zur Textverstehensforschung. Die Analogien zum Erwerb sprachlicher Strukturen legen Parallelen zwischen der mathematischen Informationsverarbeitung und dem Textverstehen nahe. Diese sind vor allem geeignet, um das Wechselspiel zwischen mathematischen Basiskompetenzen und höheren mathematischen Kompetenzen näher zu beleuchten.

Hierarchiehöhere vs. hierarchieniedrige Prozesse. In einflussreichen Modellen des Textverstehens wird unterschieden zwischen hierarchieniedrigen und hierarchiehöheren Kompetenzen (Kintsch, 1998). Erstere beziehen sich auf grundlegende Fertigkeiten wie das phonologische Rekodieren oder die Worterkennung sowie – jenseits einzelner Wortbedeutungen – die Analyse der syntaktischen Struktur und semantische Integrationsprozesse, allesamt Vorgänge, die notwendig sind um den Sinn eines Satzes zu verstehen. Hierarchiehöhere Prozesse betreffen hingegen komplexere Vorgänge wie das Herstellen satzübergreifender Zusammenhänge (globale Kohärenzbildung) oder den Aufbau eines Situationsmodells, in dem der Textinhalt mit Vorwissen verknüpft und eine Vorstellung der beschriebenen Situation generiert wird. Je komplexer das Thema ist, desto entscheidender ist das bereichsspezifische Vorwissen, das eine Person für die Lösung der Aufgabe einbringen kann. Übertragen auf die Mathematik sind Zahl-Größen-Kompetenzen und Konventions- und Regelwissen hierarchieniedrige Kompetenzen, wobei hierarchieniedrig keinesfalls missverstanden werden sollte als „leicht zu erlernen“ oder gar „weniger relevant“. Ganz im Gegenteil ist ohne dieses Fundament – ohne (Zahlen-)Wortschatz und Notation – im Grunde gar nichts möglich.

The Simple View of Mathematics. Das Modell des Simple View of Reading (Gough & Tunmer, 1986), aus dem sich unsere Bezeichnung ableitet, konzipiert Lesekompetenz als *multiplikative Verknüpfung aus* (hierarchieniedrigen) *Dekodierfertigkeiten und* (hierarchiehöherem) *Verständnis*. Das heißt, beide Kompetenzfacetten müssen vorhanden sein, um eine gute Leistung zu gewährleisten. Dies gilt analog für die Mathematik. Um eine mathematische Aufgabe lösen zu können, sollten zum einen möglichst alle Zeichen (einschließlich der Zahlen) konzeptuell verstanden sein und flüssig beherrscht werden. Es ist aber zum anderen auch erforderlich im Sinne hierarchiehöherer Kompetenzen, das dahinterstehende mathematische Problem zu verstehen sowie gegebenenfalls auch den Kontext, aus dem die Aufgabe abgeleitet werden muss. Dabei wäre es ein Trugschluss zu glauben, dass das Vorhandensein hierarchiehöherer Kompetenzen automatisch auf die Beherrschung hierarchieniedriger schließen lässt. Wenn ein Kind die Punkt-vor-Strich-Regel nicht beherrscht (oder diese aufgrund fehlender *Routinisierung* und daraus resultierend zu hoher Arbeitsgedächtnisbelastung übersieht), wird es an der entsprechenden Rechenaufgabe scheitern, auch wenn es das dahinterstehende mathematische Problem perfekt verstanden hat.

Implikationen

Horizontale Entwicklungsperspektive

Die in der Literatur gängige Darstellung der mathematischen Basiskompetenzentwicklung als Stufenmodell prägt unwillkürlich die Vorstellung davon, wie sich diese Entwicklung genau vollzieht. Sie legt nahe, dass ein Kind eine Anzahl von Stufen erklimmen muss und im Anschluss die notwendigen Basiskompetenzen erworben hat. Es kann sich nun ganz dem Erwerb „höherer" Kompetenzen widmen. Dies ist aus unserer Sicht eine Fehlvorstellung.

Die vorangegangenen Ausführungen sollten deutlich gemacht haben, dass das ZGV-Modell zwar relevante konzeptuelle Einsichten mittels Ebenendarstellung veranschaulicht, damit aber keinesfalls dieser Fehlvorstellung folgt. Spätestens mit den oben genannten Studien zur Übertragbarkeit der Modellvorstellungen in den Sekundarstufenbereich wurde dieser wesentliche Unterschied zu anderen Entwicklungsmodellen auch explizit ausformuliert. Im ZGV-Modell stellen frühe, im kleinen Zahlenraum erworbene Einsichten einer Ebene nur den Anfang eines Prozesses dar, der sich *über viele Jahre hinweg immer weiter in andere Zahlenräume* erstreckt. Zu den ersten konzeptuellen Erkenntnisschritten – im Modell aus didaktischen Gründen *vertikal* dargestellt – gesellt sich eine *horizontale* Entwicklungsperspektive über die Lebenszeit. Dies drückt sich beispielsweise darin aus, dass auch mehrstellige Zahlen zunächst mit einer unpräzisen Größenvorstellung verknüpft sind, welche sich erst später präzise ausdifferenziert. Dies erfordert zwar zusätzliche Einblicke in die „Morphologie der Zahlen", also die Frage nach welchen Regeln diese Zahlwörter gebildet werden (Stellenwertsystem). Dennoch handelt es sich in allen Fällen um nichts anderes als um zusätzliche Einträge ins bestehende mentale „Zahlenlexikon", die anfangs grob und dann zunehmend präziser verstanden werden bzw. mehr Verknüpfungen im lexikalischen Netzwerk aufweisen. So wie Kinder anfänglich einfache Wörter wie „Ball" oder „Mama" verstehen und sich über die Jahre hinweg immer abstraktere und komplexere Begriffe wie „Abseitstor" oder „Mutterkomplex" aneignen. Im Zuge dieser Entwicklung können nach und nach auch bisher noch nicht gehörte oder verwendete Zahlwörter (in einem gelernten Zahlenraum) mühelos, intuitiv und präzise in dieses Netzwerk eingeordnet werden. Analog verhält es sich mit dem Verständnis der mathematischen Notation. Obwohl in der Sekundarstufe immer mehr und immer komplexere Symbole und Verarbeitungsregeln hinzukommen, wird deren fortschreitende Aneignung als graduelles Wachstum in der Beherrschung der Notation aufgefasst. Auch hier zunächst geprägt von unpräzisen Vorstellungen bis hin zu einem immer reichhaltiger ausdifferenzierten Verständnis der Symbole und der syntaktischen Darstellung.

Einheitliche Definition – einheitliche Diagnostik

Die horizontale Entwicklungsperspektive und die Analogien zur Sprachentwicklung sind die Grundlage für die hier vorgeschlagene Definition mathematischer Basiskompetenzen als Beherrschung der mathematischen Sprache und Notation. Diese Definition legt den Fokus auf die Voraussetzungen für das Rechnen, nicht auf das Rechnen selbst. Ohne Verständnis der *„Sprache der Mathematik“* (im Sinne der hier definierten „hierarchieniedrigen“ Basiskompetenzen ZGK und KRW) ist es nicht möglich eine mathematische Aufgabe kompetent zu bearbeiten. Ebenso kann ein mathematisches Problem aus dem Alltag nicht – unter zusätzlich notwendiger Hinzuziehung hierarchiehöherer Kompetenzen – in diese Sprache der Mathematik übersetzt werden. Analog zum Erwerb einer natürlichen Sprache entwickeln sich diese Basiskompetenzen nicht in Erkenntnisstufen, sondern kontinuierlich und sie sind nicht irgendwann mit Erreichen einer höchsten Stufe abschließend erworben.

Die einheitliche Definition ist aus unserer Sicht über alle Bildungsabschnitte hinweg tragfähig. Sie eröffnet die Möglichkeit einer einheitlichen Diagnostik über die Schullaufbahn hinweg. Da die Kompetenzen unterhalb der jeweils aktuellen Lehrplaninhalte liegen, aber dennoch über alle Leistungsbereiche hinweg eng mit den mathematischen Schulleistungen assoziiert sind, können sie als curricular unabhängiger Indikator für die Mathematikleistung dienen. Von besonderem Vorteil ist dies in der Sekundarstufe, wo es möglich ist mit ein und demselben Verfahren die mathematischen Basiskompetenzen von der 4. bis zur 13. Klasse und über alle Schulformen hinweg zu erfassen. Inzwischen liegen entsprechende Verfahren vom Kindergarten bis zum Abitur vor (einen Überblick geben Ennemoser & Krajewski, in Druck).

Didaktische Implikationen

Die Bedeutung von Arbeitsgedächtnis und Routinisierung. Die horizontale Entwicklungsperspektive in Verbindung mit den Analogien zum Textverstehen legen nahe, dass es sich bei Basiskompetenzen um hierarchieniedrige, aber dennoch kontinuierlich mitheranwachsende Kompetenzen handelt. Ihr Erwerb ist also nicht irgendwann abgeschlossen, sondern die gewonnenen Einsichten brauchen im Zuge neu zu erschließender Zahlenräume und Symbole fortlaufend – in der jeweiligen Zone der nächsten Entwicklung – Übung und Routinisierung. Es genügt nicht, dass Kinder Zahlen und Symbole einmal „kurz“ verstanden haben. Dieses Wissen muss auch vertieft und gefestigt werden, um irgendwann mühelos verfügbar zu sein. Andernfalls werden hierarchieniedrige Prozesse, die Verarbeitung von Symbolen und Zeichenfolgen, das Arbeitsgedächtnis so stark belasten, dass für die Lösung des mathematischen Problems nicht genug kognitive Ressourcen zur Verfügung stehen, was letztlich in Verständnis- und Flüchtigkeitsfehlern resultiert.

Routinisierung nach Verständnissicherung. Begriffe wie Übung und Routinisierung werden häufig missverstanden. Intuitiv wird darunter meist das (potenziell stupide) Durchexerzieren von Rechenaufgaben verstanden. Unser Plädoyer bezieht sich weniger auf die Routinisierung von Prozeduren als auf den Aufbau eines gesicherten Verständnisses. Es genügt nicht, verständnisfördernde Darstellungen nur kurz einführend zu verwenden, sondern sie müssen so lange herangezogen werden, bis das Verständnis gesichert ist (Prediger, 2009). Erst dann können (und sollten) sich – idealerweise zunächst kontextreduzierte – Übungsphasen zur Routinisierung anschließen, in denen auf die Veranschaulichung verzichtet werden kann.

Irrelevante Reize minimieren – das Lernziel im Fokus. Übungen zur Routinisierung sollten den relevanten Lernaspekt isoliert in den Fokus stellen. Eine vorzeitige Einbettung in komplexere Rechenaufgaben, ein Kontext, der von diesem Aspekt ablenkt, oder eine Aufgabenstellung, die zusätzlich andere – derzeit noch nicht flüssig verfügbare – Kompetenzen erfordert, würde die Arbeitsgedächtnisressourcen stärker belasten als nötig und der Routinisierung im Wege stehen. Erst nach und nach ist eine Komplexitätserhöhung sinnvoll. Unter diesem Gesichtspunkt ist auch die Differenzierung der beiden Basiskompetenzfacetten relevant. Sofern beispielsweise das Augenmerk auf einem neuen Aspekt des Konventions- und Regelwissens liegt, sollte dies am Anfang konsequent mit sehr kleinen Zahlen eingeübt werden, um die kalkulatorischen Anforderungen so niedrig wie irgend möglich zu halten.

Literaturverzeichnis

Bloom, P. (2000). *How children learn the meanings of words.* MIT Press.

Cajori, F. (1928). *A History of Mathematical Notations: Volume I. Elementary Mathematics.* The Open Court Publishing Company.

Christl, J., Verl, E., Besca, M., Krajewski, K. & Ennemoser, M. (2025). Entwicklungsorientierte Diagnostik mathematischer Basiskompetenzen in Förderschulen Lernen, nichtgymnasialer und gymnasialer Sekundarstufe von der 5. bis 9. Klasse – Eine Längsschnittstudie (EnDiMath). In K. Beck, R. A. et al. (Hrsg.), *Förderbezogene Diagnostik in der inklusiven Bildung: Kompetenzbereiche – Fachdidaktik.* Waxmann.

Douglas, H., Headley, M. G., Hadden, S., & LeFevre, J.-A. (2020). Knowledge of mathematical symbols goes beyond numbers. *Journal of Numerical Cognition,* 6(3), 322–354.

Drüke-Noe, C. (2012). Basiskompetenzen – Was sollte jeder am Ende der allgemeinen Schulpflicht in Mathematik können? *Beiträge zum Mathematikunterricht, 1,* 209-212.

Ennemoser, M. & Krajewski, K. (in Druck). *Test zur Erfassung mathematischer Basiskompetenzen in der Sekundarstufe I und II (MBK 4-13+).* Hogrefe.

Ennemoser, M. & Krajewski, K. (2013). Entwicklungsorientierte Diagnostik mathematischer Basiskompetenzen in den Klassen 5 bis 9. In M. Hasselhorn, A. Heinze, W. Schneider & U. Trautwein (Hrsg.), *Diagnostik mathematischer Kompetenzen* (S. 225-240). Hogrefe.

Ennemoser, M., Krajewski, K. & Schmidt, S. (2011). Entwicklung und Bedeutung von Mengen-Zahlen-Kompetenzen und eines basalen Konventions- und Regelwissens in den Klassen 5 bis 9. *Zeitschrift für Entwicklungspsychologie und Pädagogische Psychologie, 43 (4),* 228-242.

Ennemoser, M., Sinner, D., Nguyen, L., & Krajewski, K. (2024). From developmental theory to effective training: long-term and transfer effects of promoting the quantity-to-number word linkage in first-graders at risk for mathematical difficulties. *Frontiers in psychology, 15,* 1380036.

Fischer, U., Roesch, S. & Moeller, K. (2017). Diagnostik und Förderung bei Rechenschwäche: Messen wir, was wir fördern wollen? *Lernen und Lernstörungen, 6,* 25-38.

Fritz, A., Ricken, G. & Gerlach, M. (2007). *Kalkulie. Diagnose- und Trainingsprogramm für rechenschwache Kinder. Handreichung zur Durchführung der Diagnose.* Cornelsen.

Fritz, A. & Ricken, G. (2008). *Rechenschwäche.* Reinhardt.

Fuson, C. K (1988): *Children's Counting and Concepts of Number.* Springer.

Gough, P. B., & Tunmer, W. E. (1986). Decoding, reading, and reading disability. *Remedial and Special Education,* 7(1), 6–10.

Halliday, M. A. K. (1978). *Language as Social Semiotic: The Social Interpretation of Language and Meaning.* Edward Arnold.

Kintsch, W. (1998). *Comprehension: A paradigm for cognition.* Cambridge University Press.

Krajewski, K. (2003). *Vorhersage von Rechenschwäche in der Grundschule.* Kovač.

Krajewski, K. (2008). Vorschulische Förderung mathematischer Kompetenzen. In: F. Petermann & W. Schneider (Hrsg.), *Enzyklopädie der Psychologie, Reihe Entwicklungspsychologie,* (S. 275-304). Hogrefe.

Krajewski, K. & Ennemoser, M. (2013). Entwicklung und Diagnostik der Zahl-Größen-Verknüpfung zwischen 3 und 8 Jahren. In M. Hasselhorn, A. Heinze, W. Schneider & U. Trautwein (Hrsg.), *Diagnostik mathematischer Kompetenzen* (S. 41-65). Hogrefe.

Krajewski, K., Nieding, G. & Schneider, W. (2007). *Mengen, zählen, Zahlen: Die Welt der Mathematik verstehen (MZZ).* Cornelsen.

Krajewski, K. & Schneider, W. (2006). Mathematische Vorläuferfertigkeiten im Vorschulalter und ihre Vorhersagekraft für die Mathematikleistungen bis zum Ende der Grundschulzeit. *Psychologie in Erziehung und Unterricht, 53,* 246-262.

Miravète, S., Tricot, A. & Amadieu, F. (2020). An innate number sense? A review of the different tasks. *Bulletin de Psychol, Issue 570(6),* 297-310.

Moser Opitz, E. (2005). Lernschwierigkeiten Mathematik in Klasse 5 und 8. Eine empirische Untersuchung zu fehlenden mathematischen Basiskompetenzen. *Vierteljahresschrift für Heilpädagogik und ihre Nachbargebiete, 74* (2), 113–128.

Prediger, S. (2009). Inhaltliches Denken vor Kalkül – Ein didaktisches Prinzip zur Vorbeugung und Förderung bei Rechenschwierigkeiten. In A. Fritz & S. Schmidt (Hrsg.), *Fördernder Mathematikunterricht in der Sekundarstufe I* (S. 213–234). Beltz.

von Aster, M. G., & Shalev, R. S. (2007). Number development and developmental dyscalculia. *Developmental Medicine and Child Neurology,* 49(11), 868–873.

Muster- und Strukturblick zur Förderung mathematischer Basiskompetenzen

Ein Überblick zum Forschungsstand und eine Konkretisierung am Beispiel additiver Zahlzerlegungen

Karina Höveler & Miriam M. Lüken

Abstract

Der vorliegende Beitrag zeigt auf, welche Rolle Muster- und Strukturkompetenzen beim Erwerb mathematischer Basiskompetenzen spielen. Nach einer Darstellung des aktuellen Forschungsstands werden Zusammenhänge zwischen dem Mathematiklernen und dem Umgehen mit Mustern und Strukturen herausgearbeitet. Anschließend wird ein Vorschlag für eine entsprechende Förderaktivität konkretisiert.

Muster, Strukturen, Förderung, Zahlzerlegung, mathematische Basiskompetenzen

Einleitung

Wenn es um das Erlernen basaler mathematischer Kompetenzen geht, stellt sich die Frage, welche spezifischen Kompetenzen zu den Basiskompetenzen gehören und wie diese erfolgreich erworben werden können. Folgt man der Definition der Ständigen Wissenschaftlichen Kommission der Kultusministerkonferenz (SWK, 2022, S. 50), so fasst man „unter basalen mathematischen Kompetenzen [...] diejenigen Verstehensgrundlagen [...], ohne die ein erfolgreiches, nachhaltig verständiges und weiterführendes Mathematiklernen im Mathematikunterricht nicht möglich ist." Welche Rolle spielen Muster- und Strukturkompetenzen in diesem Kontext? Anliegen des Beitrags ist es zu zeigen, dass ein Unterricht, der über das Erkunden von Mustern diejenigen Strukturen in den Blick nimmt, die mathematischen Objekten, Prozessen und Relationen zugrunde liegen, insbesondere für Kinder mit Schwierigkeiten beim Rechnen lernen wichtig ist und damit also für die Kinder, für die der Erwerb mathematischer Basiskompetenzen besonders relevant ist.

Forschungsstand zum Zusammenhang kindlicher Muster- und Strukturkompetenzen und mathematischem Lernen

Zahlreiche Forschende zeigten in den letzten Jahren, dass frühe Musterkompetenzen mit der Zahlbegriffsentwicklung bzw. den numerischen Fähigkeiten korrelieren (Lüken, Peter-Koop, & Kollhoff, 2014; Wijns et al., 2021). Die Studienergebnisse weisen auch darauf hin, dass die Musterkompetenzen junger Kinder im Alter zwischen 4 und 7 Jahren ein Prädiktor sowohl für die numerischen als auch für die breiter gefassten mathematischen Leistungen bis zur fünften Klasse sind (Nguyen et al., 2016; Wijns et al., 2021). Der Zusammenhang bleibt bestehen, selbst wenn die vorschulischen numerischen Fähigkeiten kontrolliert werden (Rittle-Johnson et al., 2019). Aus den vorliegenden Ergebnissen lässt sich zum einen ableiten, dass Musterkompetenzen und mathematische Fähigkeiten nicht dasselbe sind. Sie stellen einen eigenen Kompetenzbereich dar, der sich von numerischen und arithmetischen Fähigkeiten unterscheidet. Zum anderen stellt sich der Zusammenhang insofern dar, als dass Kinder mit hohen Musterkompetenzen auch mathematisch stark sind, Kinder mit geringen Musterkompetenzen hingegen zeigen eine verzögerte Zahlbegriffsentwicklung bzw. Schwierigkeiten beim Rechnen lernen. Wie lässt sich dieser Zusammenhang erklären?

Musterstrategien

Ein relativ junger Zweig der Musterforschung nimmt die kindlichen Strategien beim Bearbeiten von Musteraufgaben in den Blick, betrachtet also die Art und Weise wie Kinder beim Bearbeiten von Musteraufgaben vorgehen (Junker et al., 2025; Lüken & Sauzet, 2021). Bereits bei sehr jungen Kindern (3- bis 6-Jährige) konnten rekursive und explizit-funktionale Strategien im Kontext von Musteraufgaben beobachtet werden, die sich im Laufe der frühen Kindheit entwickeln (Lüken & Sauzet, 2021). Astrid Junker et al. (2025) fanden in ihrer Studie mit 6-Jährigen, dass Kinder mit einer verzögerten Zahlbegriffsentwicklung ausschließlich rekursive Strategien nutzten, sich auf äußere Aspekte des Musters bezogen, Eins-zu-Eins-Zuordnungen vornahmen oder stark auf die Abfolge der einzelnen Elemente des Musters fokussierten. Kinder mit einer weit entwickelten Zahlbegriffsentwicklung hingegen besaßen ein breites Repertoire an Strategien, insbesondere auch explizit-funktionale Strategien, mit Hilfe derer sie die Struktur der Muster zur Bearbeitung der Aufgaben nutzten. Der Unterschied zwischen erfolgreichen und weniger erfolgreichen Lerner:innen macht sich also daran fest, inwiefern es den Kindern gelingt, nicht nur Regelmäßigkeiten zu entdecken, sondern vom sichtbaren Muster auf die zugrundeliegenden mathematischen Strukturen zugreifen zu können. Eine Kompetenz, die nicht nur im Bereich der Muster, sondern allgemein für das mathematische Lernen bedeutsam ist.

Spontane Fokussierung auf Muster

Aktuelle Musterforschung zeigt zudem, dass sich Kinder nicht nur in ihren Kompetenzen und Strategien im Umgang mit Mustern unterscheiden, sondern auch in ihrer *Neigung* Muster zu suchen und zu analysieren. Unter dem Begriff der „spontanen Fokussierung auf Muster“ (im englischen Original „spontaneous focus on pattern“; Wijns et al., 2020) wird die spontane Neigung von Kindern verstanden, auch in Alltagssituationen Muster zu erwarten, nach Mustern Ausschau zu halten und aus eigenem Antrieb Muster zu bilden. Die Neigung unterscheidet sich dabei von den Muster*kompetenzen*, die Kinder zeigen, wenn sie explizit zu Aktivitäten mit Mustern angeleitet werden. In ihrer Studie mit Kindergartenkindern konnten Nore Wijns et al. (2020) einen Zusammenhang zwischen einer spontanen Fokussierungstendenz auf Muster und der frühen Zahlbegriffsentwicklung zeigen. Kinder mit einem Musterblick besitzen also ein weiter entwickeltes numerisches Verständnis als Kinder, die nicht von sich aus auf Regelmäßigkeiten in ihrer Umwelt fokussieren. Es wird diskutiert, dass diese unterschiedliche Wahrnehmung der Lebenswelt mit oder ohne Musterblick für die Unterschiede in sowohl den kindlichen Muster- und Strukturfähigkeiten als auch in der frühen Zahlbegriffsentwicklung verantwortlich sein könnten (Wijns et al., 2020).

Für das mathematische Lernen, insbesondere auch mit Blick auf den Erwerb mathematischer Basiskompetenzen, lassen sich folgende relevante Aspekte aus den zitierten Studien festhalten: Einige Kinder nehmen von sich aus Muster in ihrer Lebenswelt wahr und beschäftigen sich selbstinitiiert mit ihnen. Diese Kinder haben dadurch mehr Gelegenheiten, ihre Musterkompetenzen zu entwickeln, zu üben und strukturelle Einsichten auch auf andere Bereiche der Mathematik zu übertragen. Dies schlägt sich scheinbar zunächst in Strategien nieder, die die Struktur der mathematischen Objekte nutzen und schließlich sowohl in höheren Muster- und Strukturkompetenzen als auch in einer höheren mathematischen Leistung. Andere Kinder müssen erst auf Regelmäßigkeiten hingewiesen werden, da sie Muster von sich aus nicht in den Blick nehmen. Sie benötigen Unterstützung und Begleitung dabei zu erlernen, mathematische Objekte und Zusammenhänge mit einem Musterblick zu betrachten, Regelmäßigkeiten auf Phänomenebene zu erwarten und wahrzunehmen sowie auf die zugrundeliegenden Strukturen mathematischer Objekte zugreifen und sie nutzen zu können.

Aus diesen Erkenntnissen lässt sich die folgende Hypothese ableiten: Es ist sinnvoll, bei der Förderung mathematischer Basiskompetenzen den kindlichen Muster- und Strukturblick gleichzeitig mit zu fördern. Gibt es Belege für diese Hypothese?

Förderung von Muster- und Strukturkompetenzen

Tatsächlich gibt es empirische Studien, die zeigen, dass sich Muster- und Strukturkompetenzen fördern lassen. Mehrere Interventionsstudien mit Kindergarten- und Erstklasskindern, in denen die Kinder unterschiedliche Musteraktivitäten mit verschieden komplexen Mustern bearbeiteten, zeigen übereinstimmend einen Zuwachs in den kindlichen Musterkompetenzen (Fyfe et al., 2015; Papic et al., 2015). Mit Blick auf die Förderung mathematischer Basiskompetenzen scheint jedoch vor allem der Transfereffekt bedeutsam, der sich in den Studien bei einer Förderung der Musterkompetenzen auf die kindlichen numerischen bzw. arithmetischen Fähigkeiten ergibt. Kinder mit Schwierigkeiten beim Mathematiklernen, die eine Förderung ihrer Musterfähigkeiten erhielten, schnitten in standardisierten Mathetests genauso gut oder besser ab als Kinder mit einer Förderung des Zahlbegriffs; und sie schnitten besser ab als Kinder mit einer Leseförderung oder Förderung in Sozialkunde (Kidd et al., 2014). Spannend ist, dass sich der Transfereffekt insbesondere bei Kindern mit schwachen mathematischen Leistungen zeigt (Lüken & Kampmann, 2018). Das heißt, die Kinder, für die das Erlernen mathematischer Basiskompetenzen besonders relevant ist, profitieren besonders stark von einer Förderung ihrer Muster- und Strukturkompetenzen.

Unterscheidung: Mathematische Muster und Strukturen

Um im Mathematikunterricht nicht nur die Musterebene, sondern auch die Strukturebene mathematischer Objekte, Prozesse und Relationen fokussieren zu können, möchten wir nun den Unterschied zwischen einem mathematischen Muster und einer mathematischen Struktur explizieren.

Muster sind auf der phänomenologischen und damit sichtbaren Ebene angesiedelt. Sie sind jegliche Art von Regelmäßigkeiten, die in den wahrnehmbaren Objekten sichtbar werden. Im Gegensatz dazu bilden Strukturen eine nicht direkt als Phänomen wahrnehmbare Basis für die Bildung von Mustern. Unter Struktur werden mathematische Eigenschaften und Beziehungen verstanden, die den „Kern“ des Musters ausmachen und damit die Ursache für die Regelmäßigkeit des Musters darstellen (Akinwunmi & Lüken, 2021; Akinwunmi & Steinweg, 2024). Kathrin Akinwunmi und Anna Susanne Steinweg (2024) beschreiben Muster in einem Lernkontext als Tür-Öffner zu mathematischen Strukturen. Indem das phänomenologisch zugängliche Muster beschrieben, fortgesetzt, gebildet und insbesondere begründet wird (Musterkompetenzen), kann die Tür zu der dahinterliegenden Struktur geöffnet und ein Blick auf die Grundlage für die Entstehung des Musters geworfen werden. Ziel der Auseinandersetzung mit Mustern sollte also immer sein, die zugrundeliegenden Strukturen zu erfassen und zu beschreiben (Strukturkompetenzen), „die dann wiederum in verschiedenen mathematischen Kontexten genutzt werden können“ (KMK, 2022, S. 16).

Zusammenführung: Muster und Strukturen beim Erwerb basaler mathematischer Kompetenzen

Auf Basis der bisher dargestellten Forschung zu Muster- und Strukturkompetenzen und ihrem Zusammenhang mit und ihrer Relevanz für das mathematische Lernen möchten wir an dieser Stelle zusammenfassen, was Muster- und Strukturkompetenzen im Kontext des Erwerbs mathematischer Basiskompetenzen bedeuten. Auch wenn *Muster, Struktur und funktionaler Zusammenhang* in den Bildungsstandards eine eigene Leitidee mit eigenen Kompetenzerwartungen darstellt, geht es im Kontext einer Förderung basaler Kompetenzen nicht primär darum, dass Kinder beispielsweise ein sich wiederholendes Muster fortsetzen oder selbst bilden können. Es geht vielmehr um eine Grundhaltung, eine Neigung, einen Muster- und Strukturblick, der zu entwickeln ist. Es geht also fast eher um eine prozessbezogene Kompetenz als um einen Inhaltsbereich und damit um eine Haltung, Regelmäßigkeiten zu erwarten und zu suchen, um über die wahrnehmbaren Muster einen Zugriff auf die zugrundeliegenden mathematischen Strukturen zu bekommen. Wenn Kinder in die Lage gebracht werden, die mathematischen Beziehungen im Umgang mit Zahlen und zum Rechnen zu nutzen, ist die Basis für nachhaltiges mathematisches Lernen gelegt.

Muster- und Strukturblick im Kontext der verstehensbasierten Automatisierung von Zahlzerlegungen

Der kumulative Aufbau eines tragfähigen Zahlverständnisses gilt weithin als basale mathematische Kompetenz (SWK, 2022). Dazu gehört u.a. der Aufbau eines gesicherten Teil-Ganzes-Verständnisses, m.a.W. eines Verständnisses, dass sich Zahlen aus anderen Zahlen zerlegen und zusammensetzen lassen sowie die Automatisierung der Zahlzerlegungen (Gaidoschik et al., 2021; Wartha et al., 2023). Diese Bedeutung wird in den Bildungsstandards aufgegriffen: Die Lernenden sollen Zahldarstellungen und Zahlbeziehungen verstehen, die Grundaufgaben des Kopfrechnens (u. a. Zahlzerlegungen) gedächtnismäßig beherrschen und deren Umkehrungen sicher ableiten (KMK, 2022, S. 14f.). Eine verständnisbasierte Automatisierung der Zahlzerlegungen ist dabei u.a. wesentlich, um später Additions- und Subtraktionsaufgaben unter Rückgriff auf Zerlegungsstrategien geschickt lösen zu können. Gleichzeitig ist insbesondere für Lernende mit Schwierigkeiten beim Mathematiklernen bekannt, dass diese Kompetenz häufig nicht ausreichend entwickelt ist (Gaidoschik, 2019, 2021; Wartha et al., 2023). Konkret besitzen diese Lernenden häufig einseitig ordinale Zahlvorstellungen, d.h. ihnen fehlt u.a. die Vorstellung, dass Zahlen sich auf verschiedene Arten und Weisen zerlegen und zusammensetzen lassen. Ebenso haben diese

Lernenden die Zahlzerlegungen bis 10 häufig nicht automatisiert, so dass ihnen „ausschließlich das Zählen als einzig verfügbares Lösungswerkzeug" bleibt (Gaidoschik et al., 2021, S. 7).

Für eine verstehensbasierte Automatisierung empfiehlt Gaidoschik (2019) das Konzept der Zerlegungsgruppen, welches analog zur Automatisierung über Kernaufgaben beim Erlernen des kleinen 1+1 und 1-1 auf Beziehungen zwischen Zahlen fokussiert. Bislang ist dieses Konzept in deutschen Schulbüchern eher selten vertreten. Der Zugang über Zerlegungsgruppen fördert gleichzeitig die kindlichen Muster- und Strukturkompetenzen, da er Muster in strukturierten Zahldarstellungen nutzt, um auf Zahlstrukturen zugreifen zu können.

Muster, Strukturen und die zentrale Rolle strukturierter Darstellungen im Kontext „additiver Zahlzerlegungen"

Zahlen sind Steinbring (2005) folgend strukturelle Gefüge mit unterschiedlichen Eigenschaften. So lässt sich eine Zahl beispielsweise additiv auf verschiedene Arten und Weisen in zwei oder mehrere Teilmengen zerlegen und umgekehrt aus ihnen zusammensetzen. Innerhalb der additiven Zerlegungen in zwei Teilmengen gibt es einige besondere Zerlegungen, die vermeintlich „einfach" zu bestimmen sind. Dazu gehören Gaidoschiks Ansatz entsprechend Zahlzerlegungen mit 0, mit 1, mit 5 (später mit 10), von 5, von 10 und in zwei gleich große Teile in Zerlegungsgruppen (Abb. 1). Nach dem Aufbau eines grundlegenden Verständnisses der additiven Zerlegbarkeit, gilt es diese Zerlegungen zunächst zu erkunden und zu automatisieren. Schwierige Zerlegungen sollen anschließend über Beziehungen zu den bereits automatisierten Zerlegungen gelöst werden (Gaidoschik, 2019).

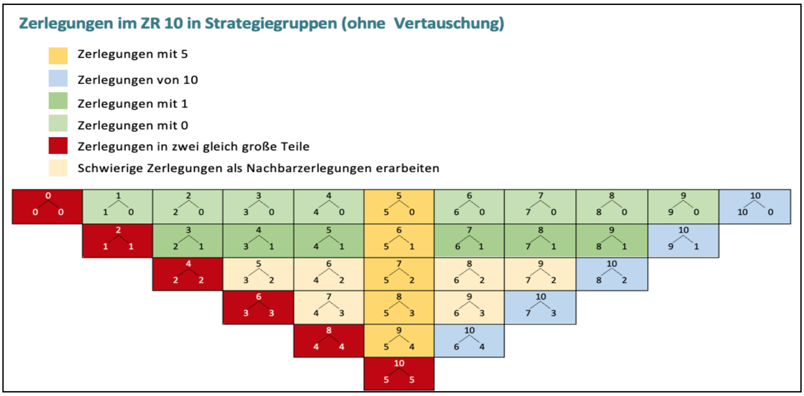


Abbildung 1: Zerlegungen im ZR 10 in Strategiegruppen (ohne Vertauschung), (Maiß et al., 2023b, S.3)

Die Zerlegungsgruppen sind nicht voraussetzungslos „einfach“, sondern sind bzw. werden es durch Vorkenntnisse der Lernenden, die Identifizierung von Mustern in strukturierten Darstellungen und gezielte Ableitung der Strukturen der Zerlegungsgruppen (z.B. Nachbarschaftsbeziehung, Fünfergliederung und dezimale Struktur). Betrachtet man die Zahlsymbole, so macht es für Lernende zunächst keinen Unterschied ob man 8 in „5 und 3“ oder in „4 und 4“ oder in „7 und 1“ zerlegt. Die „Einfachheit“ der Automatisierung der Zerlegungen beruht auf Zahlstrukturen. Beispielsweise beruhen Zerlegungen mit 1 auf der Nachbarschaftsbeziehung, die sich aus den Ordnungseigenschaften der natürlichen Zahlen ergibt: Jede natürliche Zahl besitzt eine eindeutige Position in der Zahlenfolge, genau einen Nachfolger und jede natürliche Zahl außer Null besitzt genau einen Vorgänger, so dass Nachbarzahlen eindeutig bestimmt werden können (Akinwunmi & Steinweg, 2024). Die Grundlage für die „Einfachheit“ der Zerlegung „mit 10“ und „in 10“ ergibt sich hingegen aus einer Zahleigenschaft die erst durch die historische Entwicklung bedeutsam wurde: Die Darstellung von Zahlen im Dezimalsystem, also in dezimale Bündel und Einer. Die „Einfachheit“ der Zerlegungen „mit 5“ und „in 5“ ergeben sich ebenfalls aus dieser Zerlegungsstruktur: 5 als Hälfte von 10. Diese Strukturen bzw. Eigenschaften der Zahlen lassen sich nicht auf symbolischer Ebene erkunden jedoch in bildlichen und materialgestützten Darstellungen (ebd.). Die Struktur der Darstellung entscheidet daher darüber, welche Zahleigenschaften die Lernenden erkunden können. Beispielsweise sind für die Zerlegungen „mit 5“ und „mit 10“, ebenso wie für die Zerlegungen „in 5“ und „in 10“ zwingend Darstellungen erforderlich, die die dezimale Struktur unseres Stellenwertsystems veranschaulichen. Mögliche sichtbare Muster zu Zerlegungen „mit 5“ sind beispielsweise eine volle Fünferhand oder ein Fünferstreifen plus weitere Plättchen/Finger. Als Konsequenz gilt es für die Automatisierung von Zahlzerlegungen in Zerlegungsgruppen zunächst (propädeutisch) Muster in strukturierten Darstellungen zu erkunden, die die jeweilige Struktur der Zahlbeziehungen in den einzelnen Zerlegungsgruppen implizieren. (Gaidoschik, 2019; Wartha et. al, 2023).

Aktivität „Muster in Zahlzerlegungen entdecken und nutzen“

Im Folgenden wird eine Sortieraktivität vorgestellt. Sie basiert auf einer Aktivität, die im Rahmen des DZLM-Projektes MaCo (Mathe aufholen nach Corona) als Teil zweier aufeinander aufbauender Förderbausteine entwickelt wurde, die auf die Entwicklung des Teil-Ganzes-Konzeptes und die verstehensbasierte Automatisierung der Zahlzerlegungen im Zahlenraum bis 10 zielt (Maiß et al., 2023a und b). Die Aktivität zielt darauf ab, dass die Lernenden Muster in verschiedenen Darstellungen identifizieren, die jeweils die Strukturen der Zerlegungsgruppen mit 5, mit 1 und Zerlegung in zwei gleich große Teile repräsentieren, damit diese für die Automatisierung

in Zerlegungsgruppen genutzt werden können (Maiß et al., 2023a). Als Darstellungen eignen sich symbolisch bspw. die Hütchendarstellung und anschaulich die Fingerdarstellung (zwei Hände je 5) sowie das Zehner- oder Zwanzigerfeld, um die Struktur des dezimalen Stellenwertsystems aufzugreifen und die besondere Beziehung zur 5 hervorzuheben. Die Lernenden erhalten einen Kartenstapel mit Abbildungen (zunächst nur eine Darstellung, bspw. Fingerbilder, je nach Vorkenntnissen ggf. zusätzlich die symbolische Darstellung oder Punktefelddarstellung) und den Auftrag: „Hier habt ihr Karten mit verschiedenen Zahlzerlegungen. Schaut sie euch an. Was ist gleich und was ist verschieden? Sortiert die Zahlzerlegungen in Gruppen. Beschreibt: Wann gehört eine Zerlegung zu dieser Gruppe?“
Die Sortieraktivität dient dazu Muster herauszuarbeiten

- Zerlegungen mit der Zahl 5: Es passen alle Darstellungen mit einer vollen Fünferhand (einem vollen Fünferstreifen).
- Zerlegungen mit der Zahl 1 bzw. Zerlegungen mit dem Vorgänger der Zahl: Es passen alle Darstellungen in denen ein einzelnes Plättchen (ein einzelner Finger) sichtbar/abgetrennt ist. Es passen auch Darstellungen, in denen die Vorgänger der zu zerlegenden Zahl sichtbar sind (abgetrennt): „Einer weniger als die Zahl“.
- Zerlegungen in zwei gleich große Teilmengen: Es passen alle Darstellungen bei denen gleich viele Finger an beiden Händen sichtbar sind, untereinander/nebeneinander, man das Spiegelbild sieht (gleichviele Plättchen untereinander/nebeneinander angeordnet sind, Länge, Symmetrie).

Es ist davon auszugehen, dass die Lernenden auch andere Muster hineindeuten und entsprechend andere Sortierungen vornehmen, insbesondere „Zerlegungen mit gleicher Anzahl“, dies sollte gewürdigt und in einer Zwischenreflexion verknüpft mit einer Weiterentwicklung aufgegriffen werden: „Sucht einmal Karten, die zueinander passen, weil es ein gemeinsames Muster in der Zerlegung gibt. Beschreibt das gemeinsame Muster.“

Diese Sortierungen werden anschließend gemeinsam betrachtet, um von den Mustern in den Darstellungen zu den Strukturen der Zerlegungsgruppen zu kommen und diese auch für ein schnelles Erkennen der Zerlegungen zu nutzen. Folgende Impulse tragen dazu bei: „Welche Gruppen habt ihr gefunden? Was ist das Besondere an diesen Gruppen? Wie erkenne ich schnell, welche Zerlegungen noch zu der Gruppe passen?“ Es ist sinnvoll die Lernenden im Anschluss eigene Beispiele finden zu lassen, die zu den jeweiligen Zerlegungsgruppen gehören. Um die Muster in den Zerlegungsgruppen auch zur Bestimmung einer Zerlegung nutzen zu können, werden die einzelnen Zerlegungsgruppen anschließend genauer betrachtet.

Ausgehend von symbolischen Darstellungen einer Zahlzerlegung, bei der der zweite Zahlenwert der Zerlegung gesucht wird, sollen die Lernenden gemeinsam folgenden Auftrag zum Forschen bearbeiten: „Wie kann ich in der Gruppe „einfach/schnell“ die Zerlegung bestimmen? Bei den Zerlegungen mit 5, reicht es für den fehlenden Zahlenwert aus, die verbleibenden einzelnen Finger/die einzelnen Punkte durch schnelles Sehen zu ermitteln. Bei Zerlegungen mit 1 ist die Vorstellung: Einer weniger – verknüpft mit der ordinalen Sicht „Vorgänger der Zahl“ – hilfreich. Bei Zerlegungen in zwei gleiche Teile, gibt der gegebene Zerlegungswert auch direkt den zweiten Wert an.

Diskussion und Fazit

In diesem Beitrag diskutierten wir die Rolle von Muster- und Strukturkompetenzen bei der Förderung mathematischer Basiskompetenzen. Auf Grundlage des aktuellen Forschungsstandes lässt sich ableiten, dass die Förderung von Muster- und Strukturkompetenzen im Kontext basaler Kompetenzen besonders wichtig ist, da Lernende mit Schwierigkeiten im Mathematiklernen oft nur geringe Muster- und Strukturkompetenzen mitbringen. Unser exemplarisch anhand einer Beispielaktivität zu Zahlzerlegungen veranschaulichte Ansatz besteht darin, bei einer inhaltlichen Förderung die Ebene der Muster und Strukturen gleichzeitig zu berücksichtigen. Das bedeutet, die kindlichen übergreifenden Muster- und Strukturkompetenzen zu fördern, indem gegenstandspezifisch die wesentlichen Strukturen in den Blick genommen werden.

Als allgemeinere Aspekte zur Förderung von Muster- und Strukturkompetenzen im Kontext des Erwerbs basaler Kompetenzen, empfehlen wir (auch in Anlehnung an den bereits vorhandenen wissenschaftlichen Diskurs, z.B. Akinwunmi & Steinweg, 2024; Rechtsteiner & Rathgeb-Schnierer, 2017) zur Unterstützung von Lernenden (mit Schwierigkeiten):

- **Förderung einer grundlegenden Haltung, Muster zu erwarten:** Lernende sollten aktiv nach Mustern suchen.
- **Identifikation individueller Deutungen:** Welche Muster erkennen Lernende und wie können ihre Deutungen genutzt werden?
- **Arbeit an zentralen Strukturen:** Gemeinsam mit den Lernenden werden die zentralen Strukturen des Gegenstands erarbeitet.

Wie diese Aspekte gegenstandsspezifisch und unterrichtspraktisch umgesetzt werden können, bedarf weiterer Forschung und Unterrichtsentwicklung. Insbesondere sind die folgenden Fragen zu klären: Was sind die jeweils gegenstandsspezifischen wiederkehrenden Strukturen die im Mathematikunterricht in den Blick genommen werden sollten? Inwiefern gibt es wiederkehrende Aktivitäten, Aufgaben und Impulse, die dazu beitragen können, den Muster- und Strukturblick insbesondere bei Lernenden mit besonderen Schwierigkeiten zu fördern? Wenn ja, wie sehen diese aus? Und: Inwiefern ist ein solcher Zugang wirksam?

Diese Festschrift fokussiert auf die Diagnose und Förderung von Basiskompetenzen. Vor dem Hintergrund der vorangegangenen Ausführungen plädieren wir dafür, Muster- und Strukturkompetenzen beim Erwerb von Basiskompetenzen möglichst integrativ mitzudenken. Dabei geht es insbesondere auch um den Aufbau einer Haltung, nach Mustern zu suchen. Die Muster werden genutzt, um auf die zugrundeliegenden Strukturen zugreifen und diese im Anschluss anwenden zu können, damit die jeweiligen Basiskompetenzen verständnisbasiert und nachhaltig erworben werden können. Wir schließen mit dem Zitat von Doug Clements and Julie Sarama, die diese Haltung, nach Mustern zu suchen, wunderschön auf den Punkt bringen:

> Patterning is the search for mathematical regularities and structures. Identifying and applying patterns helps bring order, cohesion, and predictability to seemingly unorganized situations and allows you to make generalizations beyond the information in front of you. Although it can be viewed as a "content area", patterning is more than a content area it is a process, a domain of study, and a habit of mind. (Clements & Sarama, 2009, S. 190)

Literaturverzeichnis

Akinwunmi, K., & Lüken, M. (2021). Muster und Strukturen: Empirische Forschung zu einem schillernden Inhaltsbereich?! In A. S. Steinweg (Hrsg.), *Mathematikdidaktik Grundschule. Blick auf Schulcurricula Mathematik - Empirische Fundierung?* Tagungsband des AK Grundschule in der GDM (Vol. 10, S. 9–24). University of Bamberg.

Akinwunmi, K., & Steinweg, A. S. (2024). *Algebraisches Denken im Arithmetikunterricht der Grundschule.* Springer Spektrum.

Clements, D. H., & Sarama, J. (2009). *Learning and teaching early math: The learning trajectories approach.* Routledge.

Fyfe, E. R., McNeil, N. M., & Rittle-Johnson, B. (2015). Easy as ABCABC: Abstract language facilitates performance on a concrete patterning task. *Child Development,* 86, 927–935. https://doi.org/10.1111/cdev.12331

Gaidoschik, M. (2019). *Rechenschwächen verstehen – Kinder gezielt fördern: Ein Leitfaden für die Unterrichtspraxis (1. bis 4. Klasse)* (11. Auflage). Persen.

Gaidoschik, M., Moser Opitz, E., Nührenbörger, M., & Rathgeb-Schnierer, E. (2021). Besondere Schwierigkeiten beim Mathematiklernen. *Special Issue der Mitteilungen der Gesellschaft für Didaktik der Mathematik, 47*(111S). https://ojs.didaktik-der-mathematik.de/index.php/mgdm/issue/view/46 (aufgerufen am 26.11.2024)

Junker, A., Nortvedt, G. A., & Farsani, D. (2025). Patterning strategies in grade 1 students with low and high number sense proficiency. *Educational Studies in Mathematics, 118*(1), 29–51.

Kidd, J. K., Pasnak, R., Gadzichowski, K. M., Gallington, D. A., McKnight, P., Boyer, C. E., & Carlson, A. (2014). Instructing first-grade children on patterning improves reading and mathematics. *Early Education & Development, 25,* 134–151.

Kultusministerkonferenz (KMK) (2022). *Bildungsstandards im Fach Mathematik Primarbereich.* https://www.kmk.org/themen/qualitaetssicherung-in-schulen/bildungsstandards.html

Lüken, M. M., & Kampmann, R. (2018). The influence of fostering children's patterning abilities on their arithmetic skills in grade 1. In I. Elia, J. Mulligan, A. Anderson, A. Baccaglini-Frank, & C. Benz (Hrsg.), *ICME-13 monographs. Contemporary research and perspectives on early childhood mathematics education* (1st ed., S. 55–66). Springer.

Lüken, M. M., Peter-Koop, A., & Kollhoff, S. (2014). Influence of early repeating patterning ability on school mathematics learning. In P. Liljedahl, C. Nicol, S. Oesterle, & D. Allan (Hrsg.), *Proc. of the Joint Meeting of PME 38 and PME-NA 36* (Vol. 4, S. 137–144). PME.

Lüken, M. M., & Sauzet, O. (2021). Patterning strategies in early childhood: A mixed methods study examining 3- to 5-year-old children' s patterning competencies. *Mathematical Thinking and Learning,* 22, 1–21.

Maiß, L., Tilke, F., & Höveler, K. (2023a). *Ablösung vom zählenden Rechnen (1) Kardinale Zahlbeziehungen (er-)kennen: Zahlzerlegungen und Zahlzusammensetzungen verstehen und systematisch betrachten (ZR 20).* Open Educational Resources.

Maiß, L., Buddenberg, H., Mense, S., Tilke, F., & Höveler, K. (2023b). *Ablösung vom zählenden Rechnen (2) Zahlzerlegungen und Zahlzusammensetzungen automatisieren und üben im Zahlenraum bis 20.* Open Educational Resources.

Nguyen, T., Watts, T. W., Duncan, G. J., Clements, D. H., Sarama, J. S., Wolfe, C., & Spitler, M. E. (2016). Which preschool mathematics competencies are most predictive of fifth grade achievement? *Early Childhood Research Quarterly,* 36, 550–560.

Papic, M., Mulligan, J., Highfield, K., McKay-Tempest, J., & Garrett, D. (2015). The impact of a patterns and early algebra program on children in transition to school in Australian Indigenous communities. In B. Perry, A. MacDonald, & A. Gervasoni (Hrsg.), *Mathematics and transition to school* (S. 217–236). Springer.

Rechtsteiner, C., & Rathgeb-Schnierer, E. (2017). „Zahlenblickschulung“ as approach to develop flexibility in mental calculation in all students. *Journal of Mathematics Education, 10*(1).

Rittle-Johnson, B., Zippert, E. L., & Boice, K. L. (2019). The roles of patterning and spatial skills in early mathematics development. *Early Childhood Research Quarterly, 46,* 166–178.

Ständige Wissenschaftliche Kommission der Kultusministerkonferenz (SWK) (2022). *Basale Kompetenzen vermitteln – Bildungschancen sichern. Perspektiven für die Grundschule. Gutachten der Ständigen Wissenschaftlichen Kommission der Kultusministerkonferenz (SWK).* http://dx.doi.org/10.25656/01:25542

Steinbring, H. (2005). *The Construction of New Mathematical Knowledge in Classroom Interaction – An Epistemological Perspective,* Mathematics Education Library, Vol. 38, Springer, Berlin, New York.

Wartha, S., Schulz, A., & Benz, C. (2023). Zusammenhänge zwischen Zahlzerlegungen, Addition und Subtraktion im Zahlenraum bis 10. *Lernen und Lernstörungen,* 12(3), 155–167.

Wijns, N., De Smedt, B., Verschaffel, L., & Torbeyns, J. (2020). Are preschoolers who spontaneously create patterns better in mathematics? *British Journal of Educational Psychology,* 90(3), 753–769.

Wijns, N., Verschaffel, L., De Smedt, B., & Torbeyns, J. (2021). Associations Between Repeating Patterning, Growing Patterning, and Numerical Ability: A Longitudinal Panel Study in 4- to 6-Year Olds. *Child Development, 92*(4), 1354–1368. https://doi.org/10.1111/cdev.13490

Mathematik und intellektuelle Beeinträchtigung

Ein anschlussfähiges Mathematik-Modell für Schulentwicklung und Unterrichtsgestaltung im sonderpädagogischen Schwerpunkt Geistige Entwicklung

Holger Schäfer

Abstract

Der Beitrag zeichnet (ausgerichtet an den KMK-Bildungsstandards Mathematik sowie den spezifischen entwicklungsbezogenen Bedarfen im Kontext intellektueller Beeinträchtigung) ein anschlussfähiges Mathematik-Modell für Lernende im sonderpädagogischen Schwerpunkt Geistige Entwicklung (SGE). Ausgerichtet an einem fachlich-disziplinären Dialog und lösend vom unergiebigen Konstrukt der Pränumerik wird eine Neuausrichtung der Mathematik für diesen sonderpädagogischen Schwerpunkt (KMK 2021) in einer Thesenfolge skizziert.

Intellektuelle Beeinträchtigung, Anschlussfähigkeit, Bildungsstandards (BS), Schul- und Unterrichtsentwicklung

Einleitung

In einem bildungstheoretischen Verständnis gehört die Mathematik neben anderen wichtigen Lernfeldern zu einem zentralen Gegenstandsbereich der schulischen Geistigbehindertenpädagogik (von Seeler 2023). Damit einhergehend müssen die fachlichen Grundlagen der Didaktik der Mathematik ebenso Berücksichtigung finden wir spezifische Aspekte der Disziplin selbst (Schäfer, 2020). Sonderpädagogische (nicht anschlussfähige) Konstrukte erweisen sich in diesem Zusammenhang als unergiebig und bieten nur wenige oder gar fehlerhafte Anschlussstellen bspw. auch an inklusive Perspektiven (Peter-Koop, 2021). Die nachstehende Thesenfolge nähert sich ersten Handlungsoptionen an.

Disziplinäre Konstrukte und Studienlage

These 1: Das (in der Disziplin tradierte) Konstrukt der Pränumerik als ein zwingendes Bedingungsgefüge im Erwerb mathematischer Grundbildung ist als „unergiebige Warteschleife“ (Dönges, 2016) in Frage zu stellen.

In den Anfängen der schulischen Geistigbehindertenpädagogik seit den 1960er Jahren bis in die 1990er Jahre spielte Mathematik eine eher untergeordnete Rolle, in der Regel gab es wenig Anbindung an die Fachwissenschaften und häufig spielten nicht-numerische Gesichtspunkte eine Rolle. Ratz und Wittmann (2011) sprechen in diesem Zusammenhang von einer Überbehütung der Lernenden.

Ein sogenannter erweiterter Mathematikbegriff mit der Unterscheidung in einen vorzahligen Bereich (Pränumerik) als Voraussetzung und den zahligen Bereich (Numerik) mit dem alleinigen Fokus auf das Rechnen etablierten sich und wurden als Dogma breit ausgearbeitet (Dönges, 2016). Dieses Verständnis schloss jedoch nicht an die Didaktik der Mathematik an und manifestierte zudem in den Lehrplänen bzw. auch in den curricularen Entwicklungen der Schule vor Ort einen unfachlichen Zugang.

Neue Studien im SGE beschäftigen sich kritisch mit dem Ansatz der Pränumerik und halten diesen Zugang (auch ausgerichtet an der internationalen Forschungslage) für unzureichend (Schäfer, Peter-Koop & Wollring, 2019). Dies begründet sich damit, dass hier nicht zuvorderst mathematische Basiskompetenzen „zum Zählen, zur Mengenerfassung und ein erstes Verständnis für Zahlzerlegungen oder einfache Rechenanforderungen“ (Gasteiger & Bruns, 2022, S. 2) einbezogen werden, die in der Mathematikdidaktik „für das mathematische Weiterlernen als absolut grundlegend angesehen werden“ (ebd.), sondern entlang einer an Piaget orientierten Stufenfolge pränumerische – also vorzahlige – Übungen (bspw. zum Körperschema) im Sinne eines Bedingungsgefüges vor diese Inhalte gesetzt werden. Dönges (2016) fasst für die Mathematik für Lernende mit intellektueller Beeinträchtigung zusammen, dass „die Annahme eines solchen Voraussetzungsverhältnisses als widerlegt und eine pränumerische Förderung insgesamt als überholt [gilt]“ (ebd., S. 13).

Zur mathematischen Förderung im SGE sowie auch in Verbindung mit forschungsmethodischen Fragestellungen nennt Moser Opitz (2016) folgende Herausforderungen:

- Es handelt sich in diesem Feld um eine sehr heterogene Lerngruppe mit sehr unterschiedlichen Leistungsniveaus (Kroschewski, 2021). Angemerkt sei, dass viele Untersuchungen den oberen Leistungsbereich bei intellektueller Beeinträchtigung adressieren und damit Schnittmengen zum sonderpädagogischen Schwerpunkt Lernen einschließen.

- Damit verbunden sind eine überschaubare Forschungslandkarte und wenige empirische Grundlagen zur fachlich anschließenden Konzeptentwickelung (bspw. wie erschließen sich die Lernenden Strategien der Addition usf.).
- Dadurch entsteht eine weite Verbreitung nicht fachlicher Konzepte (Pränumerik, Körperschema, isolierte motorische Übungen usf.), die nicht der Förderung spezifischer mathematischer (Basis-) Kompetenzen zuträglich sind.

Zugleich sind Ergebnisse aus kleinen Stichproben und Einzelfallanalysen zu nennen (bspw. von Seeler, 2023), die etwa vergleichbare Aneignungsprozesse mathematischer Basiskompetenzen auch bei Kindern und Jugendlichen im SGE sowie die Bedeutsamkeit des Einbezugs zugleich entwicklungsbezogener Perspektiven aufzeigen (bspw. hinsichtlich visueller Wahrnehmungstätigkeiten), deren Entwicklungen aber im Voranschreiten an Grenzen stoßen und im Verlauf nicht selten enden (Peter-Koop, 2016; Schnepel, 2019).

Zusammenfassend kann festgehalten werden, dass der bisherige Ansatz der sogenannten Pränumerik fachwissenschaftlich nicht anschließend, nicht tragfähig ist. Nichtfachlicher Unterricht führt zu „unergiebigen Warteschleifen“ (Dönges, 2016), Hindernissen und Behinderungen, tradiert auch in der Lehrkräftebildung fehlenden fachlichen Anschluss und führt damit im Rahmen der Lehrplangestaltung sowie der fachlichen Schulentwicklung (bspw. Fachkonferenzen) zu wenig Innovation (aktuell zu den Effekten direkter Instruktion Sarimski 2024, S. 223ff.).

Mit dem einzufordernden Recht auf Bildung für Lernende mit intellektueller Beeinträchtigung ist auch das Recht auf einen anschlussfähigen (Mathematik-) Unterricht im Sinne mathematischer Grundbildung unmittelbar verbunden, die an die Vermittlung mathematischer Basiskompetenzen anschließend die inhalts- und prozessbezogenen mathematischen Inhaltsbereiche der Bildungsstandards (BS) im Sinne einer thematischen Angebotsstruktur einbezieht (Schäfer & Ruwisch, 2022).

Fachwissenschaftlicher Diskurs

These 2: Auch die Mathematikdidaktik bewertet das Konstrukt der Pränumerik als eine Hürde im Zahlerwerbsprozess (Peter-Koop, 2016 und 2021).

Im Themenheft „Zahlen bitte“ stellt Peter-Koop (2016) fest: „Der Weg zum

Verständnis von Zahlen, Mengen und Operationen führt nicht über die intensive Beschäftigung mit pränumerischen Aktivitäten“ (ebd., S. 7) und auch Wittmann (2016) fordert fachliche Strukturen im Mathematikunterricht im SGE als wesentliche (an Konzepten ausgerichtete) Hilfestellung im Aufbau der Förderung ein.

Über diesen Bereich des Zahlerwerbs hinaus sehen auch Vertreterinnen und Vertreter der Mathematikdidaktik für die Bereiche Größen & Messen sowie Raum & Form den dringlichen Ausrichtungsbedarf an fachlichen Strukturen bspw. im Kontext Längenvorstellungen und Messkompetenzen sowie auch hinsichtlich authentischer Raumerfahrungen in Verbindung mit fachlichen Zugängen (im Überblick Schäfer, 2020 und mit Bezug auf den Inhaltsbereich Daten & Zufall aktuell Schäfer & Peter-Koop 2025). Bsph. werden hier genannt die Ausrichtung am Entwicklungsmodell der Zahl-Größen-Verknüpfung (ZGV) von Krajewski und Ennemoser (2013) sowie zentrale didaktische Ansatzpunkte wie

- das *Zählen* und *Zählkompetenzen* (u.a. Phasenfolgen, Zahlaspekte) (u.a. Schnepel, 2019),
- die *simultane* und *quasi-simultane Anzahlerfassung* (subitizing und conceptual subitizing) (Benz, Peter-Koop und Grüßing, 2015),
- die *Zerlegbarkeit von Zahlen* (*Teil-Ganzes-Verständnis*) als zentrale gedankliche Leistung (Peter-Koop, 2016) (Abb. 1 und 2),
- das *strukturierte Zählen* als die Zusammenführung der bisherigen Stufenfolge sowie
- *Grundvorstellungen* zu *Zahlen*, *Zahlenraum* und *Operationen* (Dönges, 2016; Krauthausen, 2018).

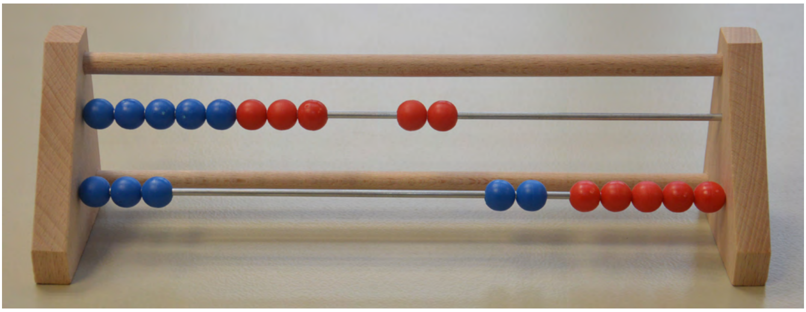


Abb. 1: methodische Zugänge im SGE zur Entwicklung der Einsicht in die Zerlegbarkeit von Zahlen (Peter-Koop, 2016, S. 8f.)

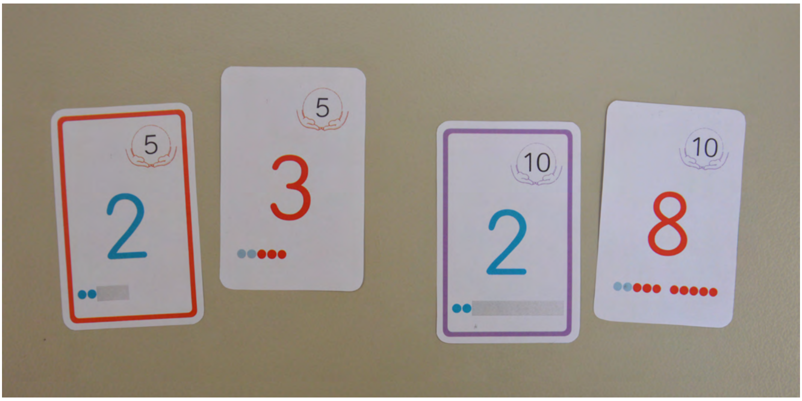


Abb. 2: methodische Zugänge im SGE zur Entwicklung der Einsicht in die Zerlegbarkeit von Zahlen (Peter-Koop, 2016, S. 8f.)

Auch aus der Perspektive der Fachdidaktik wird der Ansatz der Pränumerik als nicht tragfähig und insbesondere im inklusiven Diskurs als nicht anschlussfähig bewertet. Es werden dringlich sowohl die Ablösung vom überholten Konstrukt der Pränumerik als auch der Anschluss an fachliche Inhalte bspw. innerhalb der Arithmetik und der Geometrie vorgeschlagen.

Als aktuelles und konsequent interdisziplinär ausgerichtetes Beispiel hierzu darf das im Herbst 2025 erscheinende Themenheft „Lernen Konkret“ (Nr. 4, 2025) mit dem inhaltlichen Schwerpunkt „Daten und Zufall“ genannt werden, in dem sich Lehrende der Mathematikdidaktik und der schulischen Geistigbehindertenpädagogik diesem inhaltlichen Kompetenzbereich der BS verschränkend annähern (Schäfer & Peter-Koop, 2025).

Orientierungsrahmen

These 3: Die KMK-Bildungsstandards (BS) (2022) können als ideengebender Rahmen (Ratz & Wittmann, 2011) und orientierende Struktur bspw. auch im Zusammenhang mit der individuellen Förderplanung und curricularen (Schul-) Entwicklung im SGE genutzt werden (Schäfer, Peter-Koop & Wollring, 2019).

Die BS beschreiben für den regelhaften Primarstufenbereich die *inhaltsbezogenen* (Raum & Form, Zahl & Operation, Größen & Messen sowie Daten & Zufall) sowie die *prozessbezogenen mathematischen Kompetenzen* (Probleme lösen, Modellieren, Kommunizieren, Argumentieren, Darstellen sowie mit mathematischen Objekten und Werkzeugen arbeiten), die Lernende ohne Beeinträchtigung am Ende der vierjährigen Grundschulzeit erreicht haben sollen. *Muster, Strukturen* und *funktionale Zusammenhänge* werden als übergreifende inhaltsbezogene Kompetenzen verstanden.

Studien zu mathematischen Fertigkeiten von Kindern und Jugendlichen mit intellektueller Beeinträchtigung (Siegemund, 2016; Sarimski, 2024) zeigen, dass dahingehende Kompetenzen der Lernenden im SGE in weiten Teilen im eigentlichen Leistungsspektrum der ersten und zweiten Klasse des regelhaften Grundschulbereichs liegen (im Grenzbereich zum Förderschwerpunkt Lernen auch im Bereich der dritten Klasse) (bspw. in Bezug auf Zahlenraum, Operationen, Transfervermögen) (Kroschewski, 2021).

Diese Kompetenzen sind jedoch nicht bei allen Lernenden zu erwarten und bedürfen eines (geduldigen) Entwicklungsverlaufs bis hin in die Sekundarstufe II (Schäfer & Wittmann, 2017). Auch gilt es in diesem Zusammenhang festzustellen, dass die BS für Schule und Unterricht im SGE nicht verbindlich sind, ebenso schließen sich normative Vergleichsarbeiten vor dem Hintergrund individualpädagogischer Zugänge und dahingehender curricularer Offenheit für diesen sonderpädagogischen Schwerpunkt aus.

Zugleich dürfen mit Blick auf die fachliche Ausrichtung und den inklusiven Anschluss (u.a. Sprache, Inhalte, Medien) sowohl die *inhaltsbezogenen* als auch die *prozessbezogenen mathematischen Kompetenzen* der BS für die curriculare Ausgestaltung im SGE als ideengebend verstanden werden (Ratz & Wittmann, 2011; Moser Opitz, 2016; Schäfer & Ruwisch, 2022). Mit dem sowohl fachlichen Anschluss als auch dem wichtigen Blick auf die Heterogenität des Personenkreises sowie der damit verbundenen curricularen Offenheit können die BS in diesem Verständnis als eine Weiterentwicklung *der Grundideen der Mathematik* im SGE (hier noch mit dem Fokus auf die Arithmetik und die Geometrie) nach Ratz und Wittmann (2011) verstanden werden.

Erste curriculare Entwicklungslinien lassen sich basierend auf diesem Verständnis in den neueren Lehrplänen der Bundesänder ausmachen wie bspw. in Bayern (2022), Baden-Württemberg (2022) und Nordrhein-Westfalen (2022), die in ihrer Struktur im Bereich Mathematik (ebenso Deutsch) konsequent nach den BS gliedern, zudem die für die Lernenden (bedarfsbezogenen) sogenannten *individuellen kompetenzorientierten Lernaktivitäten* (Bayern 2022) in einer vernetzenden Struktur berücksichtigen – diese sind „Motorik und Wahrnehmung“, „Denken und Lernstrategien“, „Kommunikation und Sprache“ sowie „Emotionen und soziales Handeln“ (Bayern 2022, Abschnitt 2.1).

Für den Personenkreis der Lernenden mit komplexer und umfänglicher intellektueller Beeinträchtigung nennen Loscher und Schäfer (2024) zudem konkrete Beispiele, um auch für diese Kinder und Jugendlichen (inklusive) „mathematische Möglichkeitsräume entstehen zu lassen:

- bspw. im Bereich „Motorik und Wahrnehmung“ durch die Erzählung basaler Aktionsgeschichten, die mathematische Sachverhalte beschreiben und Veränderungen von Mengen, Längen oder Formen wahrnehmungsbezogen gestalten.

- bspw. im Bereich „Denken und Lernstrategien“ durch weitere Elementarisierung des Gegenstandes sowie geeigneter Visualisierung von Rechenwegen.
- bspw. im Bereich „Kommunikation und Sprache“, indem Methoden der Unterstützten Kommunikation (UK) multimodal integriert werden (Talker, Symbole, Gebärden).
- bspw. im Bereich „Emotionen und soziales Handeln“ durch sehr kleinschrittiges Arbeiten (Lernerfolge sichern), um Ängste zu vermeiden sowie durch Arbeiten in Gruppen, die Kommunikation und Kooperation einfordern und förderlich wirken“ (ebd., S. 175).

Standards und Bedarfe

These 4: Ein anschlussfähiges Mathematik-Modell setzt die BS in Beziehung zu den besonderen (auch elementaren) Bedarfen der Lernenden mit intellektueller Beeinträchtigung (Schäfer, Peter-Koop und Wollring, 2019).

Während nun einerseits die BS an die fachlichen Grundlagen anschließen, eine fachliche Kommunikation losgelöst vom schulischen Setting ermöglichen und schließlich im Kontext Differenzierung auch nach oben leistungsstärkeren Kindern und Jugendlichen Angebote machen können, ist zugleich der Blick zu richten auf die unspezifischen und spezifischen Vorläuferfertigkeiten, die in der Didaktik der regelhaften Primarstufe infolge der oft bereits vorhanden Kompetenzen der Kinder eine mehr nachgeordnete Rolle spielen.

Gerade vor dem Hintergrund der großen Heterogenität der Lernenden im SGE und damit einhergehenden differenten Lernstrategien können in Verbindung mit den unten näher ausgeführten Vorläuferfertigkeiten aus dem Elementarbereich (Krauthausen, 2018) die Kompetenzbereiche der BS als ideengebende Grundlagen der Mathematikdidaktik in Beziehung gesetzt werden mit den besonderen Bedarfen im SGE. Die Abbildungen 3 und 4 verdeutlichen bsph. wie im inhaltsbezogenen Kompetenzbereich Raum & Form sowohl für den Primarstufenstufenbereich im SGE als auch innerhalb der Sekundarstufe II anregende (auch basale) und zugleich anspruchsvolle Zugänge gedacht werden können:

- Abb. 3 zeigt ein Arbeitsergebnis zum Spiegeln von ersten geometrischen Figuren einer Schülerin (7;8 Jahre) („Die Schülerinnen und Schüler […] erkennen und beschreiben Eigenschaften der Achsensymmetrie […]“ KMK, 2022, S. 17),

- wohingegen Abb. 4 das kooperative, anspruchsvolle Arbeiten von zwei Schülerinnen mit der Zeichenuhr zeigt (16;2 und 17;3 Jahre) („Die Schülerinnen und Schüler [...] fertigen Zeichnungen geometrischer Figuren mit und ohne Hilfsmittel an [...]“ ebd.).

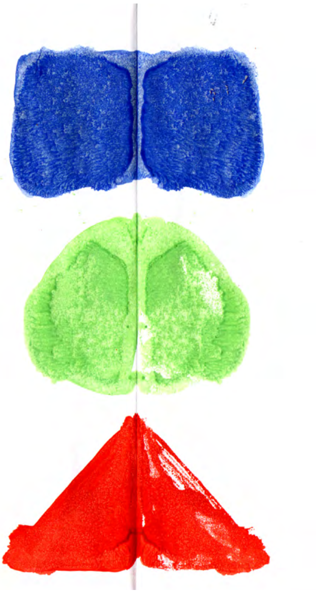


Abb. 3: Achsenspiegelung (Schäfer & Wittmann, 2017, S. 9).

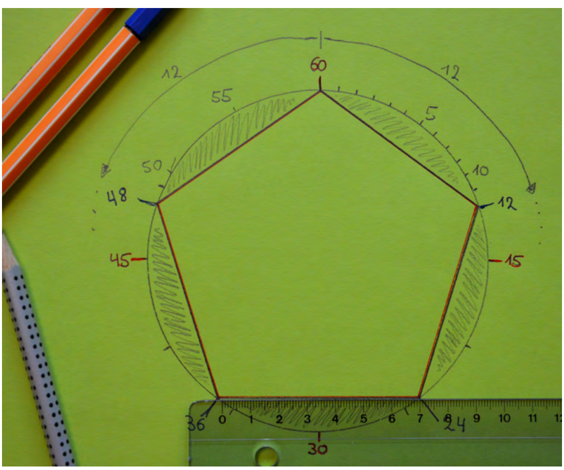


Abb. 4: Zeichenuhr (Schäfer & Wittmann, 2017, S. 4).

Der Kompetenzbereich *Muster, Strukturen, funktionaler Zusammenhang* wird durch seine übergeordneten Positionen für den Mathematikunterricht im SGE interessant, denn er adressiert eben nicht nur den zahligen Bereich der Arithmetik (*Zahl & Operation)*, sondern eben auch die Inhaltsbereiche *Raum & Form*, *Größen & Messen* sowie *Daten & Zufall*. Dadurch ermöglicht er es zugleich aus einer ganzheitlichen Perspektive, dem Anspruch einer aktiv entdeckenden Lernumgebung gerecht werden und forschendes Lernen initiieren zu können (vgl. Ratz & Wittmann, 2011). Ganzheitlich meint in diesem Zusammenhang auch, dass die Auseinandersetzung mit *Mustern, Strukturen* und *funktionalen Zusammenhängen* nicht zwangsläufig auf der symbolischen Ebene mit Stift und Heft ablaufen muss, sondern auch kreativ und handelnd in die Bereiche Kunst, Sport oder Sachunterricht übertragen werden kann (bspw. Schäfer, 2020, S. 83f.) – prozesshaft führt ein solcher Zugang über die Schuljahre hinweg in seiner (kategorialen) Verschränkung fach- und entwicklungsbezogener Perspektiven auch zu einer Verschiebung der Schwerpunkte: während in den ersten Schulbesuchsjahren mehr entwicklungsbezogene Schwerpunkte zu setzen sind, verlagern sich diese bei nicht wenigen Lernenden hin zu einer Auseinandersetzung auf der Symbolebene (Sarimski, 2024).

Schäfer und Ruwisch (2022) äußern sich zur „kontinuierliche[n] (sich auch wechselwirksam durchdringende[n]) Verbindung der Repräsentationsebenen“ (ebd., S. 15) wie folgt: „Es ist davon auszugehen, dass viele Lerngelegenheiten aus situativen Handlungserfahrungen, aus unmittelbarer – und sich bei diesen Kindern vielfach wiederholender – Tätigkeit erwachsen werden. Doch es gilt zugleich,

- nicht nur von enaktiven Handlungen (mit konkretem Material) ausgehend ikonische Abbildungen zu entwickeln und letztlich symbolischen Notationen zuzuordnen (also konkrete Handlungen zu mathematisieren),
- sondern auch durch die Auseinandersetzung mit der Symbolstruktur die Auflösung in ursprüngliche Fragestellungen (sozusagen die Rückführung zum Konkreten) herauszufordern“ (ebd.).

Die prozessbezogenen Kompetenzen finden im SGE bislang noch unzureichende Beachtung, können jedoch analog zu den inhaltsbezogenen Kompetenzen eine über die Jahre hinweg gedachte intentionale Orientierungshilfe sein. So entspricht bspw. das *Modellieren* der im eigentlichen Sinne fachimmanenten Mathematisierung von Alltagshandlungen (und umgekehrt, also die Übersetzung aus der Symbolebene heraus hin zu konkreten Bezügen wie bspw. dem Einkauf, dem Ablängen im Werkunterricht o.ä.), was aus methodischer Sicht ein im SGE geeigneter Zugang sein kann. Auch das *Darstellen* (ebd.) mathematischer Zusammenhänge in Tabellen, Grafiken und

Übersichten bietet sich (ggf. auch mit Hilfestellungen) an (vgl. hierzu das Tabellen-Beispiel aus Schäfer, 2020, S. 75 sowie die Beiträge zur Darstellung von Daten in Schäfer & Peter-Koop 2025).

Annäherung, Fundierung, Entwicklung

These 5: Ein anschlussfähiges Mathematik-Modell kann zur disziplinären Annäherung (bspw. Forschung), fachlichen Fundierung (bspw. Lehrkräftebildung, Diagnostik) und damit unterrichtlichen und schulischen Weiterentwicklung im SGE beitragen (bspw. Schulprogramm) (Schäfer, 2020).

Dieses fachliche Verständnis rückt nun Mathematik mehr in den unterrichtlichen Fokus im SGE und führt zu einer Etablierung des Faches auch im Zuge von Schulentwicklung:

- Sowohl die Disziplin, die Schulen und schließlich die Lehrenden entwickeln losgelöst vom schulischen Setting einen fachlichen Anspruch und suchen den Dialog mit dem Fach. Dadurch entstehende Synergien können sich wiederum auf Lehre und Forschung auswirken (Moser Opitz, 2016; Siegemund, 2016)
- Die Didaktik im SGE entdeckt die aktuelle und zukünftige Bedeutsamkeit der Mathematik für die individuelle Bildungsplanung der Lernenden und erkennt exemplarisches Potenzial im Sinne eines Erschließens von Welt.
- Dieser schulische Prozess verändert insgesamt auch den Blick der Eltern auf Schule und Unterricht und das eigene Kind hinsichtlich Zutrauen und Vertrauen einerseits in Potenziale und andererseits die Wahrnehmung von Bedarfen (auch hinsichtlich gegebener Grenzen).
- Schließlich entsteht auch bei den Lernenden (mit zunehmendem Alter) ein eigener Anspruch an das Mathematiklernen in Verbindung nicht zuletzt mit beruflichen Perspektiven.

Ein solches Mathematik-Modell ist aus der didaktischen Perspektive heraus prozesshaft zu verstehen im Kontext *Fachdidaktik* (bspw. das *Arbeiten mit mathematischen Objekten und Werkzeugen* als Ergänzung innerhalb der prozessbezogenen Kompetenzen), *Schul- und Unterrichtsentwicklung* (bspw. die curricularen Vereinbarungen vor Ort) und *Lehrkräftebildung* (auch in Bezug zu landesgesetzlichen, föderalen und curricularen Vorgaben). Hinsichtlich der Input- und Prozessorientierung darf ein solches Mathematik-Modell nicht absolut gesetzt, sondern sollte vielmehr verstanden werden als ideengebend und orientierend sowie inhaltlich bereichernd und innovativ (bspw. hinsichtlich der Bereiche *Größen & Messen* oder *Daten & Zufall*).

Ein solches Mathematik-Modell liefert außerdem anschlussfähige Hinweise zu den

- unspezifischen Vorläuferfertigkeiten bspw. den auditiven und visuellen Merkspannen und der phonologischen Bewusstheit (u.a. Krajewski & Ennemoser, 2013; Fuson, 1988) oder der Bedeutung familiärer Anregung, dem Geschlecht und dem Arbeitsgedächtnis (Benz, Peter-Koop & Grüßing, 2015) ebenso wie zu den
- spezifischen Vorläuferfertigkeiten wie das mengen- und zahlenbezogene Vorwissen (Zählen, Subitizing, Mengenvergleiche) oder räumliche und zeitliche Vorstellungsleistungen
- sowie zu spezifischen Fragestellungen der Mathematik im SGE bspw. Mathematik und Sprache oder Medien (Veranschaulichung und Anschauung) (Krauthausen, 2018).

Ein solches Mathematik-Modell soll schließlich als *Referenzrahmen für Forschungsfragen* (u.a. Moser Opitz, 2016; Schnepel, 2019; von Seeler 2023) herangezogen werden

- bspw. hinsichtlich allgemeiner Erkenntnisse im SGE (auch bundeslandübergreifend)
- oder spezifischem Wissen zu einzelnen Kompetenzfeldern (bspw. *Raum & Form* oder *Größen & Messen* sowie aktuell in Schäfer und Peter-Koop (2025) beschrieben zu *Daten & Zufall*)
- sowie zu Fragen methodischer Zugänge (instruktives Lernen, Neue Medien und Computer; digitales Lernen)
- und dem Feld der Diagnostik und Förderplanung.

Es bietet *inhaltliche* und *sprachliche Orientierung* im fachlichen (*inklusiven)* Diskurs, dient damit perspektivisch als *Grundlage interdisziplinärer Vernetzung* von Sonderpädagogik und Mathematik-Didaktik (Schäfer & Peter-Koop 2025) und ermöglicht auf diesem Wege die oben beschriebene mathematischer Grundbildung für Kinder und Jugendliche mit intellektueller Beeinträchtigung – fachorientiert, entwicklungsgerecht und altersgemäß (Schäfer, 2020).

Literaturverzeichnis

Benz, C., Peter-Koop, A. & Grüßing, M. (2015). *Frühe mathematische Bildung.* Springer Spektrum.

Dönges, Ch. (2016). Didaktische Ansatzpunkte mathematischer Förderung im FgE. *Lernen konkret, 35*(4), 12-15.

Fuson, K. (1988). *Children's counting and number concept.* Springer.

Gasteiger, H. & Bruns, J. (2022). Mathematische Basiskompetenzen und tragfähiges Zahlverständnis zum Schulanfang – Basistext. Open Educational Resources.

Krajewski, K. & Ennemoser, M. (2013). Entwicklung und Diagnostik der Zahl-Größen-Verknüpfung zwischen 3 und 8 Jahren. In M. Hasselhorn, A. Heinze, W. Schneider & U. Trautwein (Hrsg.), *Diagnostik mathematischer Basiskompetenzen. Jahrbuch der pädagogisch-psychologischen Diagnostik. Band 11* (S. 41-66). Hogrefe.

Krauthausen, G. (2018). *Einführung in die Mathematikdidaktik – Grundschule.* Springer.

Kroschewski, M. (2021). Mathematische Kompetenzen. In D. Baumann, W. Dworschak, M. Kroschewski, Ch. Ratz, A. Selmayr & M. Wagner (Hrsg.), *Schülerschaft mit dem Förderschwerpunkt geistige Entwicklung II (SFGE II)* (S. 135-160). wbv.

Kultusministerkonferenz KMK (2022). *Bildungsstandards im Fach Mathematik für den Primarbereich. Beschluss vom 15.10.2004 i.d.F. vom 23.06.2022.*

Kultusministerkonferenz KMK (2021). *Empfehlungen zur schulischen Bildung, Beratung und Unterstützung von Kindern und Jugendlichen im sonderpädagogischen Schwerpunkt Geistige Entwicklung (Beschluss der Kultusministerkonferenz vom 18.03.2021).*

Loscher, Th. & Schäfer, H. (2024). Mathematik und komplexe Behinderung. In H. Schäfer, Th. Loscher & L. Mohr (Hrsg.), *Unterricht bei komplexer Behinderung. Sonderpädagogischer Schwerpunkt Geistige Entwicklung (Schule und Unterricht bei intellektueller Beeinträchtigung Band 03)* (S. 173-195). Kohlhammer.

Ministerium für Schule und Bildung Nordrhein-Westfalen (2022). *Unterrichtsvorgaben für den zieldifferenten Bildungsgang Geistige Entwicklung an allen Lernorten in Nordrhein-Westfalen.* Düsseldorf.

Ministerium für Kultus, Jugend und Sport Baden-Württemberg (2022). *Bildungspläne Sonderpädagogik. Förderschwerpunkt geistige Entwicklung.* Stuttgart.

Moser Opitz, E. (2016). Inklusiver Mathematikunterricht – auch für Schülerinnen und Schüler mit dem Förderschwerpunkt geistige Entwicklung. In A. Steinweg (Hrsg.), *Inklusiver Mathematikunterricht – Mathematiklernen in ausgewählten Förderschwerpunkten.* (S. 57-60). University of Bamberg Press.

Peter-Koop, A. (2016). „Zahlen bitte!" Zur Bedeutung numerischer Kompetenzen für das Rechnenlernen. *Lernen konkret,* 35(4), 4-9.

Peter-Koop, A. (2021). Bedeutung und Diagnostik von Vorläuferfertigkeiten für das Mathematiklernen im Anfangsunterricht. In H. Schäfer, H. & Ch. Rittmeyer (Hrsg.), *Handbuch inklusive Diagnostik.* (S. 191-206). Beltz.

Ratz, Ch. & Wittmann, E. Ch. (2011). Mathematisches Lernen im FgE. In Ch. Ratz (Hrsg.), *Unterricht im Förderschwerpunkt geistige Entwicklung* (S. 129-154). Athena.

Sarimski, K. (2024). *Intellektuelle Behinderung im Kindes- und Jugendalter. Psychologische Analysen und Interventionen.* Hogrefe.

Schäfer, H. (2020). *Mathematik und geistige Behinderung. Grundlagen für Schule und Unterricht.* Kohlhammer.

Schäfer, H. & Peter-Koop, A. (Hrsg.) (2025). *Daten, Kombinatorik, Zufall. Inhaltsbezogene mathematische Kompetenzen im SGE.* Themenheft Lernen konkret Nr. 4 2025. Westermann.

Schäfer, H., Peter-Koop, A. & Wollring, B. (2019). Grundlagen der Mathematik. In H. Schäfer (Hrsg.), *Handbuch Förderschwerpunkt geistige Entwicklung* (S. 478-497). Beltz.

Schäfer, H. & Ruwisch, S. (2022). Zahlen, Größen, Räume. *Grundschule* 54(1), 12-19.

Schäfer, H. & Wittmann, E. Ch. (2017). Zur Entwicklung geometrischen Denkens. Gründe und Möglichkeiten im Förderschwerpunkt geistige Entwicklung. In *Lernen konkret,* 36(4), 4-9.

Schnepel, S. (2019). *Mathematische Förderung von Kindern mit einer intellektuellen Beeinträchtigung.* Waxmann.

Siegemund, St. (2016). *Kognitive Lernvoraussetzungen und mathematische Grundbildung von Schülerinnen und Schülern mit dem Förderschwerpunkt geistige Entwicklung.* Athena.

von Seeler, I. (2023). Der Erwerb von Rechenkompetenzen durch die Unterstützung metakognitiven Denkens. In E. Grüning (Hrsg.), *Kinder und Jugendliche mit Beeinträchtigungen der geistigen Entwicklung unterrichten.* (S. 63-83). Kohlhammer.

Wittmann, E. Ch. (2016). Aufbauendes fachliches Lernen von Mathematik. ... auch im Förderschwerpunkt geistige Entwicklung. In: *Lernen konkret,* 35(4), 30-33.

„Und jetzt denk noch mal an die Zehnerfreunde!“

Transferbezogene Anmerkungen zur Erarbeitung der Zahlzerlegungen

Sebastian Kollhoff

Abstract

In diesem Beitrag werden anhand eines Ausschnitts aus einer Fördersituation zentrale transferbezogene Schwierigkeiten bei der anschaulichen Erarbeitung der Zahlzerlegungen aufgezeigt und diskutiert.

Förderung, Zahlzerlegungen, Grundaufgaben, Darstellungswechsel, Transferprozesse

Einleitung

Die Erarbeitung der Zerlegungen der Zahlen bis 10 hat einen bedeutenden Einfluss auf die Entwicklung der Rechenfähigkeiten von Kindern (Resnick, 1992; Wartha et al., 2023). Neben tragfähigen Grundvorstellungen zu Zahlen und Operationen – dazu gehören ein tragfähiges Stellenwertverständnis, das Wissen über Beziehungen zwischen Rechenoperationen und weitere arithmetische Zusammenhänge (Schulz 2014) – bildet die Kenntnis automatisierter Grundaufgaben eine notwendige Voraussetzung für die Entwicklung tragfähiger Rechenstrategien und ist damit eine mathematische Basiskompetenz. Wenn Schülerinnen und Schüler beim Rechnen nicht auf automatisierte Grundaufgaben zugreifen und diese sicher nutzen können, sind sie gezwungen, andere, nicht rechnende, sondern zählende Lösungswege zu nutzen (Wartha et al., 2023; Gaidoschik et al., 2021), womit eine Ablösung vom zählenden Rechnen und die Entwicklung von tragfähigen Rechenstrategien nachhaltig beeinträchtigt wird (Schipper, 2009, S. 335). Aus diesem Grund sind die Erarbeitung der Zerlegungen aller Zahlen im Zahlenraum bis 10 (z.B. 8 in 5 und 3) und der Zusammenhänge zwischen Additions- (z.B. 2+6=8 und 6+2=8) und Subtraktionsaufgaben (9-6=3 und 9-3=6) zentrale Lerninhalte der ersten Klasse (MSB NRW, 2021, S. 85 ff.). Mit der Erarbeitung von Zahlentripeln $(a|b|c)$ der Form $c=a-b$ mit $a,b,c \in \{0,1,\ldots,10\}$ wird die Hoffnung verbunden, dass die Lernenden ein sogenanntes Teil-Ganzes-Konzept (Gaidoschik et al., 2021; Lenz & Wittmann, 2023) entwickeln und verstehen, dass jede Menge bzw. jede Zahl auf verschiedene Arten in Teile zerlegt werden kann und die Summe dieser Teile der Ausgangsmenge bzw. -zahl entspricht. So sollen zum Beispiel aus dem Zahlentripel (10|7|3) die Additionsaufgaben 10=7+3 und 10=3+7 sowie die Subtraktionsaufgaben 3=10-7 und 7=10-3 nicht-zählend abgeleitet werden können. Dieses Verständnis soll den Lernenden helfen grundlegende mathematische Zusammenhänge zu erkennen, um sie für das Rechnen zu nutzen (z.B. Ableiten von Nachbar- und Tauschaufgaben, gegen- und gleichsinniges Verändern).

Darstellungswechsel in der Erarbeitung von Zahlzerlegungen

Um zu lernen, Zahlen als Teil-Ganzes-Relationen zu sehen, müssen Kinder Wege finden, Rechenaufgaben zu strukturieren. Dies erfolgt in der Regel anhand von Anschauungs- und Arbeitsmaterialien, wie Fingern, Wendeplättchen, Schüttelboxen oder ähnlichen (Kullberg et al., 2020). Diese Materialien und Veranschaulichungen haben eine wichtige Funktion im Lernprozess von Kindern (Schulz, 2014). Sie dienen einerseits als Lösungs- bzw. Bearbeitungshilfen sowie andererseits – und das ist gerade im Anfangsunterricht die bedeutende Funktion – als Mittel zum Entdecken und Erkennen arithmetischer und algebraischer Strukturen (Steinbring, 1994). Für die Zahlzerlegungen bedeutet dies insbesondere, dass die Kinder am Material die Möglichkeit haben, eine Menge handelnd zu zerlegen und die Zerlegungen zu systematisieren, bevor sie auf die symbolische Ebene in Zahlentripel bzw. ihre zugehörigen Additions- und Subtraktionsaufgaben übersetzt und zum Beispiel in Zerlegungshäusern notiert werden. Mit diesen Darstellungswechseln ist die Hoffnung verbunden, dass die Kinder Grundvorstellungen (Kollhoff, 2021) zu den Zahlen als Teil-Ganzes-Beziehungen aufbauen und diese an konkrete Anschauungsmittel binden und mental verankern können (Gaidoschik et al., 2021).

Vor diesem Hintergrund wird das Wechseln von Darstellungen auch als „didaktisches Prinzip“ (Salle et al., 2023, S. 441) verstanden. Damit ist gemeint, dass die Lernenden Gemeinsamkeiten und Unterschiede zwischen verschiedenen Darstellungen herausarbeiten und die Auswirkungen eines Darstellungswechsels reflektieren. Im Mittelpunkt steht hierbei die Frage, was sich durch den Darstellungswechsel ändert, und was gleichbleibt (Duval, 2006), womit die Aufmerksamkeit der Lernenden auf die Invarianten bzw. den Kern einer mathematischen Idee, eines mathematischen Objekts oder einer mathematischen Beziehung gelenkt wird. Dabei sind intra- und intermodale *Transferprozesse* von großer Bedeutung für die Ausbildung von operativen Vorstellungen. (Kollhoff, 2021; Gaidoschik et al., 2021; Duval, 2006). Durch diese sollen Beziehungen innerhalb einzelner und zwischen verschiedenen Darstellungen hergestellt werden. In Kollhoff (2021) wird herausgestellt, dass die mit den Darstellungen und Anschauungsmitteln verbundenen *Handlungskonzepte* einen wesentlichen Einfluss auf die Transfer- bzw. Übertragungsprozesse haben. Damit ist gemeint, dass Darstellungen und Anschauungsmittel in Abhängigkeit ihrer inhaltlichen Deutung immer bestimmten Möglichkeiten und Einschränkungen (Greeno, Smith & Moore, 1993) für ein Operieren unterliegen. Die Wahrnehmung dieser Möglichkeiten und Einschränkungen ist somit immer auch sehr eng mit der initialen Bedeutungsaushandlung verbunden. So unterscheiden sich beispielsweise die Handlungskonzepte des Anschauungsmittels „Finger" sehr deutlich von den Handlungskonzepten des Anschauungsmittels „Wendeplättchen" oder auch dem Arbeitsmittel „Schüttelbox". Während Finger zumeist im ordinalen Sinne des Abzählens oder als Zählhilfe verwendet werden, sind typische Handlungen mit Wendeplättchen Mengen zu legen und zu strukturieren. Dementgegen werden mit Schüttelboxen Mengen durch willkürliches Schütteln der Box hergestellt, bei dem eine bestimmte Anzahl der Kugeln sichtbar bzw. verborgen wird.

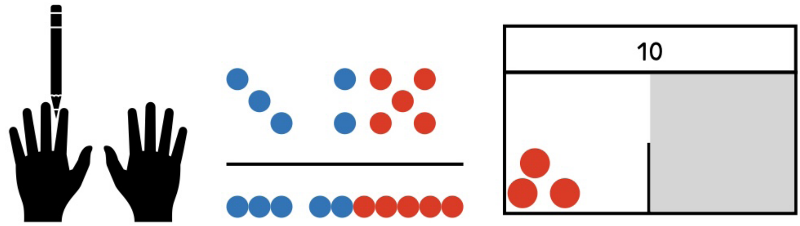


Abb. 1: Das Tripel (10|7|3) in unterschiedlichen Darstellungen

Wenn Lernende erkennen sollen, dass eine Operation in einer Darstellung isomorph zu einer Operation in einer anderen Darstellung ist, setzt dies voraus, dass die Lernenden bereits ein Verständnis von den Operationen in beiden Darstellungen entwickelt haben, um die Gemeinsamkeiten überhaupt erkennen zu können. Sollen Gemeinsamkeiten zwischen einer Zerlegungsdarstellung mit Fingern, an Wendeplättchen oder einer Schüttelbox (Abb. 1) erkannt werden, müssen die Lernenden zunächst einmal verstehen, wie Zahlen in den jeweiligen Darstellungen repräsentiert werden. Dabei besteht ein Unterschied, ob Zahlen als Anzahlen von Fingern, geordneten oder ungeordneten Anzahlen von Wendeplättchen oder als Anzahl sichtbarer und nicht sichtbarer Kugeln in einer Schüttelbox dargestellt werden.

Anhand des folgenden Fallbeispiels werden darstellungsbezogene Transferprozesse in der Erarbeitung der Zahlzerlegungen betrachtet und Ursachen für typische Schwierigkeiten diskutiert.

Ein Fallbeispiel: Die Förderung von Mona

Im Folgenden betrachten wir zur Illustration einen Ausschnitt aus der Einzelförderung von Mona, die aufgrund ihrer Schwierigkeiten beim Rechnen im Zahlenraum bis 100 in der Beratungsstelle für Kinder mit Rechenschwierigkeiten für 4 Monate von zwei Studierenden individuell betreut wurde. Der folgende Ausschnitt entstammt der zweiten Förderstunde, in der zu Beginn eine „Wiederholung“ bzw. Erarbeitung der Zahlzerlegungen durchgeführt wurde. Die Diskussion des Ausschnitts erfolgt in zwei Teilen (i) der Einführung an einer Fingerdarstellung und (ii) dem Transfer auf die Darstellung mit Wendeplättchen.

Die Einführung an einer Fingerdarstellung

Zu Beginn der Förderstunde fragt die Lehrperson (LP) Mona, ob ihr der Begriff „Zehnerfreunde“ etwas sage. Mona antwortet auf diese Frage mit einem Nicken und die Lehrperson bittet Mona, ihre Hände vor sich auf den Tisch zu legen. Mona legt ihre Hände auf den Tisch und die Lehrperson legt einen Stift zwischen den Mittel- und Zeigefinger von Monas linker Hand (Abb. 1, links).

LP	Ich äh leg jetzt mal meinen Stift leg ich zwischen deine Finger und du sagst mir welche Zehnerfreunde du erkennen kannst. (3 Sek) Kannst du da welche erkennen?
MONA	(schüttelt den Kopf) Nö.
LP	Gar nicht?
MONA	(schüttelt weiter den Kopf) Nö. (führt ihre Hände geschlossen zum Gesicht) Doch zwei.
LP	Hm. Leg nochmal aufn Tisch. Dann machen wir's nochmal. Wie viele Finger hast du denn an deiner an deinen Händen zusammen?
MONA	Zusammen zehn.
LP	Genau. Deshalb kann man da Zehnerfreunde ziemlich gut zeigen, ne? Weil Zehnerfreunde sind ja immer zwei Zahlen...
MONA	(unterbricht) Aber wenn du das hier machst (zeigt mit der rechten Hand auf die Finger der linken Hand rechts vom Stift) Zwei ... da rein.

Das Übungsformat, bei dem durch einen Stift Zerlegungen der 10 an den Fingern dargestellt werden, ist Mona nicht bekannt. Entsprechend gibt Mona an, in der Darstellung zunächst keine „Zehnerfreunde“ zu erkennen

(„Nö“). Dies scheint ihr unangenehm zu sein und sie versucht sich der Situation zu entziehen und löst die Darstellung vorerst auf, indem sie ihre Hände vom Tisch nimmt, zu ihrem Gesicht führt und vorsichtig „doch zwei“ einwirft. Die Lehrperson bittet Mona die Darstellung wieder herzustellen und ihre Hände zurück auf den Tisch zu legen. Sie geht nicht, auf den Einwurf von Mona ein, sondern versucht stattdessen die Darstellung zu erklären und fragt Mona, wie viele Finger sie „an [ihren] Händen zusammen“ hat. Mona sagt sofort, dass sie „zusammen zehn“ Finger an ihren Händen hat. Es wird jedoch nicht ersichtlich, inwieweit Mona dieser Verbindung von zehn Fingern und der Zahl 10 folgen kann. Sie stimmt der Lehrperson nicht zu als diese feststellt, dass die Finger daher „ziemlich gut“ dafür geeignet seien, die Zerlegungen der 10 an ihnen darzustellen. Mona unterbricht die Lehrperson und versucht ihre Deutung der Darstellung, insbesondere des Stifts zu erläutern: „Aber wenn du das hier machst […] zwei … da rein.“ Mit Blick auf ihren Einwurf „doch, zwei“ ist anzunehmen, dass ihr Fokus zunächst allein auf den Fingern direkt neben dem Stift liegt.

LP	Genau, der liegt da zwischen den Fingern. Und wie viele Finger sind auf der Seite (weist auf die linke Seite des Stifts)
MONA	Einer.
LP	Guck nochmal genau. Wie viele Finger hast’n du hier jetzt?
MONA	Achso, drei.
LP	Genau. Und wie viele sind dann auf der anderen Seite?
MONA	Zwei.
LP	Du hast auch noch ne andere Hand oder?
MONA	Fünf.
LP	Und insgesamt?
MONA	(guckt auf ihre Hände und nickt beim Nennen der Zahlen) Fünf plus drei gleich zehn. … Nö, stimmt gar nicht. Fünf plus drei gleich acht.

Die Lehrperson greift die Erklärung von Mona auf, versucht Monas Blick jedoch auf beide Hände zu lenken. Sie expliziert diesen Perspektivwechsel jedoch nicht, sondern fragt Mona lediglich, „wie viele Finger auf der [linken] Seite [des Stifts]“ sind, worauf Mona entsprechend ihren vorhergehenden Antworten mit „einer“ antwortet. Erst auf die erneute Frage der Lehrperson gibt Mona an, dass „drei“ Finger auf der linken Seite des Stifts und „zwei“ auf der rechten Seite des Stifts zu sehen sind. Die Finger ihrer rechten Hand bezieht sie in ihre Betrachtung nicht ein. Daher fragt die Lehrperson sie nun direkt, ob sie „auch noch ne andere Hand“ habe.

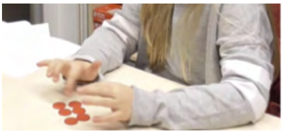
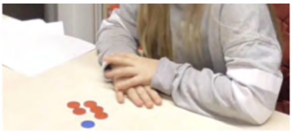
Nachdem Mona sagt, dass sie „fünf" Finger an ihrer anderen Hand hat, versucht sie auf die Nachfrage „und insgesamt" die Finger ihrer rechten Hand miteinzubeziehen. Sie ermittelt jedoch nicht die Gesamtanzahl der Finger beider Hände auf der linken Seite des Stifts, sondern addiert die fünf Finger ihrer rechten Hand mit den drei Fingern auf der linken Seite des Stifts. Mona ergänzt zunächst „fünf plus drei gleich zehn", merkt dann jedoch, dass das „gar nicht [stimmt]", da „fünf plus drei gleich acht" sei. Bemerkenswert ist hier, dass Mona die Darstellung wechselt und, anstatt die Gesamtanzahl von Fingern zu bestimmen, Additionsaufgaben aufstellt. Das verbal-symbolische Register scheint Mona deutlich vertrauter zu sein, sodass sie ihren ersten Vorschlag „fünf plus drei gleich zehn" umgehend korrigiert.

LP	Genau, guck noch mal. Lass mal die drei außer außen auß- außen vor. Überleg mal. Wie viele Finger sind'n das zusammen?
MONA	Sechs.
LP	Guck nochmal genau hin. Wie viel haste da?
MONA	Da hab ich einen.
LP	Auf der Seite?
MONA	Zwei.
LP	Genau. Und da hast du?
MONA	Fünf.
LP	Und wie viel sind das zusammen?
MONA	Sieben.
LP	Genau. Und wenn du auf der anderen Seite drei hast, wie viele haste denn dann zusammen?
MONA	Acht.
LP	Wie viele Finger hast du denn?
MONA	Zehn.
LP	Genau, sieben plus drei ist zehn. Du hast hier nämlich sieben Finger liegen, und das sind drei. Und der Stift, der trennt einfach nur die Drei von der Sieben.
MONA	Achso.
LP	Und dann hast du die Zehnerfreunde.

Die Lehrperson nimmt Monas Wechsel auf die verbal-symbolische Darstellungsebene nicht auf, sondern versucht ihre Aufmerksamkeit zurück auf die Fingerdarstellung zu lenken. Sie bittet sie, nicht auf die drei Finger, die links vom Stift liegen, zu achten, sondern fragt sie erneut, wie viele Finger „das zusammen" sind, wobei sie sich auf die fünf Finger von Monas rechter Hand und die zwei Finger ihrer linken Hand bezieht. Mona kann dieser Zusammenfassung der Finger in „zwei" und „fünf" jedoch nicht folgen, sodass die Lehrperson explizit diese Finger zeigt, Mona die jeweiligen Anzahlen nennen lässt und sie schließlich zu der Antwort „sieben" führt. Es wird deutlich, dass Mona sofort weiß, dass zwei und fünf sieben sind, diese Anzahlen jedoch nicht an ihren Fingern sieht. Entsprechend antwortet sie auf die Frage, wie viele Finger sie hat, „wenn [sie] auf der anderen Seite drei [weitere Finger]" habe, mit „acht", wobei sie erneut nicht das gesamte Fingerbild, sondern lediglich den nächsten Finger zum Stift betrachtet. An dieser Stelle scheint die Lehrperson ihre Geduld zu verlieren und anstatt die zu betrachtenden Finger hervorzuheben, fragt sie Mona erneut, wie viele Finger sie habe, was Mona erneut mit „zehn" beantwortet. An dieser Stelle bricht die Lehrperson die gemeinsame Bedeutungsaushandlung ab und erklärt Mona explizit ihre erwartete Deutung: „Sieben plus drei sind zehn. Du hast hier nämlich sieben Finger liegen, und das sind drei. Und der Stift, der trennt einfach nur die drei von der sieben". Hervorzuheben ist auch hier, dass die Lehrperson nicht allein auf der Darstellungsebene der Finger verbleibt, sondern ihre erwartete Antwort in Form eines verbal-symbolischen Additionsterms formuliert und erst in der genaueren Erläuterung einen Bezug zu der Fingerdarstellung herstellt. Dabei verbindet sie explizit die Summanden mit den Teilmengen in der Fingerdarstellung: „Du hast hier nämlich sieben Finger liegen, und das sind drei."
In ihrer weiteren Erklärung wechselt sie die Repräsentationsebene, in dem sie sagt, dass „der Stift [...] einfach nur die Drei von der Sieben [trennt]", obgleich der Stift nicht die Zahlen trennt, sondern zwei Teilmengen der zehn Finger definiert, die von der Lehrperson mit den Zahlen 3 und 7 gleichgesetzt werden. Inwieweit Mona diesen Zusammenhang zwischen Fingern und Zahlen tatsächlich erfasst hat, kann zu diesem Zeitpunkt nicht geklärt werden. Die Lehrperson schließt mit der Bemerkung „und dann hast du die Zehnerfreunde". In der Folge besprechen die Lehrperson und Mona noch vier weitere Zerlegungen, die Mona – jetzt wo sie verstanden hat, was die Lehrperson von ihr erwartet – problemlos benennt.

Transfer auf die Darstellung mit Wendeplättchen

Direkt im Anschluss an die Übung mit den Fingern erklärt die Lehrperson, dass sie mit Mona als nächstes über die „Sechserfreunde" sprechen möchte. Als direkte Reaktion auf diese Ankündigung legt Mona ihre Hände mit gespreizten Fingern auf den Tisch, genauso wie sie es zu Beginn für die Besprechung der Zehnerfreunde tun sollte. Hier jedoch erklärt die Lehrperson, dass sie die Hände nicht brauche und bittet Mona sich sechs Wendeplättchen zu nehmen. Mona zählt sechs Wendeplättchen ab und legt sie mit der roten Seite nach oben in zwei Dreierreihen vor sich auf den Tisch.


LP	Und erklärst du mir mal dabei, was du machst? Weißt du noch wie wir angefangen haben?
MONA	Immer ein Plättchen umgedreht (dreht ein Plättchen um, sodass fünf rote und ein blaues Plättchen vor ihr liegen.
LP	Genau. Hast du denn da jetzt schon was gesehen bevor du das umgedreht hast?
MONA	(streicht mit dem Finger nacheinander über die Reihen). Das sind drei und drei, sechs.
LP	Hm. Und die Sechserfreunde?
MONA	Null.
LP	Genau. Sechs und Null.
MONA	(wendet sich den Plättchen zu) Fünf und Eins (zieht das blaue Plättchen etwas aus dem Muster heraus und dreht ein weiteres Plättchen um) Vier und Zwei (schiebt auch dieses Plättchen etwas aus dem Muster heraus, dreht ein weiteres um) Drei und Drei. (dreht ein weiteres Plättchen um) Zwei und Vier. (dreht ein weiteres Plättchen um) Eins und Fünf. (dreht das letzte Plättchen um) Sechs und Null.
LP	Ja, super. Haste dich noch erinnerst, was wir letztes Mal gemacht haben, ne? Jetzt darfst du dir noch ein Plättchen nehmen.

Da sie bereits in der ersten Förderstunde Zahlzerlegungen anhand von Wendeplättchen besprochen haben, fragt die Lehrperson Mona, ob sie noch wisse „wie [sie in der letzten Stunde] angefangen habe. Mona erinnert sich, dass sie „immer ein Plättchen umgedreht" habe und dreht mit ihrer Erklärung eines der sechs Plättchen um, sodass nun fünf rote und ein blaues Plättchen vor ihr liegen (vgl. Abb. 2). Die Lehrperson bestätigt ihr die Korrektheit ihres Vorgehens und fragt sie, ob sie „da jetzt schon was gesehen [habe] bevor du das umgedreht hast“, worauf Mona ihr antwortet, dass sie „drei und drei, sechs“ Plättchen gesehen habe. Auf den Hinweis „und die Sechserfreunde“ antwortet Mona unmittelbar mit „Null“, was die Lehrperson aufgreift und mit „Sechs und Null“ präzisiert. In der Folge beginnt Mona nach und nach jeweils ein Plättchen umzudrehen und stets die Anzahl der roten und blauen Plättchen zu nennen. Sie nennt stets zuerst die Anzahl der roten und danach die Anzahl der blauen Plättchen. Erst als sie das letzte Plättchen wendet, ändert sie die Reihenfolge und nennt zuerst die Anzahl der blauen und dann der roten Plättchen.

Im Vergleich zu der Übung mit der Fingerdarstellung scheint Mona diese Spielart bekannt zu sein, sodass sie, ohne groß darüber nachdenken zu müssen, ein Handlungsmuster abrufen kann. In diesem Handlungsmuster wendet sie die Plättchen nach und nach und nennt nach jedem Umdrehen die Zerlegungen mit Bezug auf die Anzahlen der roten und blauen Plättchen. Diese Handlung führt sie zielgerichtet und sicher wie einen Automatismus durch. Die Lehrperson bestätigt, dass es sich um das Vorgehen handelt, das sie in der vorhergehenden Förderstunde eingeübt haben. In der Folge wiederholen sie das gleiche Vorgehen mit sieben Plättchen, wobei Mona die Anzahlen der roten und blauen Plättchen parallel in einem Zerlegungshaus notiert.

Diskussion

Dieser Ausschnitt aus einer Förderstunde illustriert einige zentrale Schwierigkeiten bei der Erarbeitung der Zahlzerlegungen, die jedoch weniger in der inhaltlichen Komplexität als vielmehr in didaktischen Aspekten der Erarbeitung erwachsen. Die didaktische Intention in dieser Förderstunde ist zunächst die anschauungsgebundene Wiederholung bzw. Erarbeitung der Zerlegungen der 10 anhand der Darstellung an Fingern. Auf dieser Grundlage soll dann der inhaltliche Transfer auf die Zerlegungen der 6 und auf Darstellungsebene der Transfer von den Fingern zu Wendeplättchen und schließlich zur symbolischen Notation in Zerlegungshäusern erfolgen.

Zu diesen Transferprozessen kommt es in dieser Förderstunde jedoch nicht, da (i) die Fingerdarstellung für Mona zunächst keine Bedeutung hat, (ii) an Fingern und Wendeplättchen sehr unterschiedliche Handlungen durchgeführt werden und (iii) keinerlei strukturelle Beziehungen zwischen den Übungen hergestellt und expliziert werden.

Die Fingerübung ist im Wesentlichen dadurch zu charakterisieren, dass Mona versucht der Darstellung an ihren Fingern eine Bedeutung zu geben. Für sie stehen ihre 10 Finger zunächst einmal nicht für die Menge 10, die durch das Einlegen eines Stifts in unterschiedliche Teilmengen zerlegt werden. Die Gründe dafür können vielfältig sein, es ist jedoch anzunehmen, dass sie darin besteht, dass die Finger zweier Hände zusammen betrachtet werden müssen, um in ihnen die 10 zu erkennen. Diese Interpretation wird dadurch gestützt, dass Mona erst auf mehrfachen Hinweis auch die Finger ihrer zweiten Hand in ihre Betrachtung einbezieht. Noch ehe Mona eine gewisse Vertrautheit mit diesem Übungsformat aufbauen kann, wird das Darstellungsmedium zu den Wendeplättchen geändert. Das Handlungskonzept, das an diesem Medium mit ihr eingeübt wurde, ist, dass sie die Plättchen sukzessive umdreht und die jeweiligen Anzahlen roter und blauer Plättchen nennt. Diese Tätigkeit hat zunächst erst einmal wenig damit zu tun, dass ein Stift zwischen ihre Finger gelegt wird und sie die Anzahlen von Fingern auf beiden Seiten des Stiftes nennen soll. Dieser Unterschied zwischen den Tätigkeiten wird zudem dadurch verschärft, dass ihre zentrale Tätigkeit in der Fingerübung auf das Nennen von – für sie zunächst willkürlichen – Anzahlen von Fingern beschränkt ist. Das Legen des Stifts und respektive das Herstellen der Teilmengen erfolgt durch die Lehrperson. Würde Mona den Stift zwischen die Finger der Lehrperson legen, wäre sie diejenige, die die Zerlegungen herstellt. Zuletzt wird von Mona erwartet, dass sie eigenständig eine Verbindung zwischen diesen beiden Übungen herstellt und eine Dissoziation der Tätigkeiten (vgl. Duval, 2006; Kollhoff, 2021) auf die Ebene der Zahlen als Abstraktionen der Mengen von Fingern und Wendeplättchen vornimmt. Für diese Abstraktion ist es erforderlich, dass explizite Beziehungen zwischen den Übungen und ihrer mathematischen Bedeutung herstellt werden. Dies erfolgt jedoch nicht, sodass aus der Perspektive von Mona hier zwei Übungen durchgeführt werden, die zunächst einmal wenig miteinander zu tun haben, an deren Ende sie dann aber ein Zerlegungshaus ausfüllen soll, für das sie wiederum eine eigene Bearbeitungsstrategie erarbeiten muss, um dieses strukturiert zu vervollständigen.

Es wird deutlich, dass es für Mona noch ein großer Schritt ist, die Zahlzerlegungen so zu verinnerlichen, dass sie in Form eines automatisierten Faktenabrufs zum Rechnen genutzt werden können. Um sie auf diesem Weg zu unterstützen ist es jedoch erforderlich, dass die Anschauungsmittel mit ihr so erarbeitet werden, dass sie für sie einen Sinn ergeben, und dass sie die Zeit bekommt, mit den einzelnen Übungen so vertraut zu werden, dass sie Gemeinsamkeiten und Unterschiede zwischen den Übungen überhaupt erkennen und verstehen kann. Nur so kann es ihr letztendlich gelingen, die Beziehungen zwischen den Materialhandlungen und dem Rechnen auf Zahlenebene zu erkennen und zu nutzen.

Literaturverzeichnis

Duval, R. (2006). A Cognitive Analysis of Problems of Comprehension in a Learning of Mathematics. *Educational Studies in Mathematics, 61* (1/2). https://doi.org/10.1007/s10649-006-0400-z.

Gaidoschik, M. S., Moser Opitz, E., Nührenbörger, M., & Rathgeb-Schnierer, E. (2021). Besondere Schwierigkeiten beim Mathematiklernen. *Special Issue der Mitteilungen der Gesellschaft für Didaktik der Mathematik 47*(111S). https://ojs.didaktik-der-mathematik.de/index.php/mgdm/issue/view/46. Zugriff: 15. Januar 2025.

Greeno, J. G., Smith, D. R. & Moore, J. L. (1993). Transfer of Situated Learning. In D. K. Dettermann & R. J. Sternberg (Hrsg.), *Transfer on Trial: Intelligence, Cognition, and Instruction.* Ablex.

Kollhoff, S. (2021). *Analyse von Transferprozessen in der Entwicklung des Bruchzahlbegriffs: Theoretische Rahmung und empirische Untersuchung.* Springer. https://doi.org/10.1007/978-3-658-33981-4.

Kullberg, A., Björklund, C., Brkovic, I., & Runesson Kempe, U. (2020). Effects of learning addition and subtraction in preschool by making the first ten numbers and their relations visible with finger patterns. *Educational Studies in Mathematics, 103.* https://doi.org/10.1007/s10649-019-09927-1.

Lenz, K., & Wittmann, G. (2023). Zur Erarbeitung des Teil-Ganze-Konzepts im mathematischen Anfangsunterricht: Welche Lerngelegenheiten bieten Schulbücher für die erste Klasse? *Journal für Mathematik-Didaktik, 44*(2). https://doi.org/10.1007/s13138-023-00218-0.

Ministerium für Schule und Bildung des Landes Nordrhein-Westfalen (2021). *Lehrplan für die Primarstufe in Nordrhein-Westfalen.* https://www.schulentwicklung.nrw.de/lehrplaene/lehrplan/300/ps_lp_sammelband_2025_03_18.pdf

Resnick, L. B. (1992). From protoquantities to operators: Building mathematical competence on a foundation of everyday knowledge. In E. Leinhardt, R. Putnam & R. A. Hattrup (Hrsg.), *Analysis of arithmetic for mathematics teaching (S. 373 – 429).* Lawrence Erlbaum.

Salle, A., Schmidt-Thieme, Schulz, A., & Söbbeke, E. (2023). Darstellen und Darstellungen verwenden. In R. Bruder, A. Büchter, H. Gasteiger, B. Schmidt-Thieme, & H.-G. Weigand (Hrsg.), *Handbuch für Mathematikdidaktik.* https://doi.org/10.1007/978-3-662-66604-3.

Schipper, W. (2009). *Handbuch für den Mathematikunterricht an Grundschulen.* Schroedel.

Schulz, A. (2014). *Fachdidaktisches Wissen von Grundschullehrkräften: Diagnose und Förderung bei besonderen Problemen beim Rechnenlernen.* Springer. https://doi.org/10.1007/978-3-658-08693-0.

Steinbring, H. (1994). Die Verwendung strukturierter Diagramme im Arithmetikunterricht der Grundschule: Zum Unterschied zwischen empirischer und theoretischer Mehrdeutigkeit mathematischer Zeichen. *Mathematische Unterrichtspraxis, 4.*

Wartha, S., Schulz, A., & Benz, C. (2023). Zusammenhänge zwischen Zahlzerlegungen, Addition und Subtraktion im Zahlenraum bis 10: Empirische Untersuchung der Kompetenzen von Lernenden im zweiten und dritten Schuljahr. *Lernen und Lernstörungen, 12(3).*

Konzeptuelle Überlegungen zu Diagnose und Feedback beim Problemlösen in der Primarstufe

Yasmin Theile, Raja Herold-Blasius & Benjamin Rott

Abstract

Mathematisches Problemlösen ist und bleibt eine besondere Herausforderung im Mathematikunterricht. Das liegt auch daran, dass Lehrkräfte in der Aus- und Weiterbildung wenig darauf vorbereitet werden. Häufig tendieren Lehrkräfte dazu, das Problemlösen durch produktorientiertes Feedback zu begleiten. In diesem Beitrag zeigen wir, wie eine fundierte Ausarbeitung des Problemraums darauf vorbereiten kann, Problembearbeitungsprozesse nicht nur produkt-, sondern auch prozessorientiert durch reichhaltiges Feedback auf verschiedenen Ebenen gelingen kann.

Diagnose, Grundschule, Lehrkräfte, Professionalisierung, Feedback

Einleitung

Problemlösen ist ein besonders wichtiger Aspekt mathematischer Aktivität und es nimmt einen zentralen Stellenwert beim Erlernen von Mathematik ein. Bereits in der Primarstufe sollen und müssen Grundlagen dafür gelegt werden (Pehkonen et al., 2013). Problemlösen wird dabei oft über die Abgrenzung zu Routineaufgaben definiert (Holzäpfel et al., 2018; Rott, 2013): Während Schüler:innen bei Routineaufgaben auf ein Vorgehen zur Lösungsfindung zurückgreifen können, sind Problem-bearbeitungsprozesse dadurch gekennzeichnet, dass keine Routinen abgearbeitet werden können. Dies führt in der Regel dazu, dass solche Prozesse nicht immer gradlinig verlaufen und mit Umwegen oder Sackgassen verbunden sind. Grundsätzlich verfügen bereits Kleinkinder über die kognitiven Fähigkeiten, die für das Lösen problemhaltiger Aufgaben nötig sind (Janott, 2021). In der Grundschule ist dabei Unterstützung von Lehrkräften notwendig, da die Schüler:innen förderliches Verhalten wie ein systematisches und geplantes Herangehen an Problemstellungen, aber auch den Umgang mit Ungewissheit und Frust erst entwickeln müssen (Herold-Blasius, 2021; Söhling, 2019).

Damit in solchen Situationen entsprechende Prozesse nicht vorzeitig abgebrochen werden oder in Sackgassen enden, ist es entscheidend, dass Lehrkräfte die Lernenden durch gezieltes Feedback unterstützen, um sie zur Weiterarbeit zu motivieren oder um inhaltliche und strategische Impulse zu setzen. Feedback umfasst alle Informationen, die Lehrkräfte ihren

Schüler:innen über ihren aktuellen Arbeits- und Leistungsstand vermitteln (Hattie & Timperley, 2007; Narciss et al., 2022). Ziel ist es, den Lernenden zu ermöglichen, ihr Denken und Handeln entsprechend den Rückmeldungen anzupassen (Shute, 2008). Während Feedback einen Kernbestandteil der bildungswissenschaftlichen Forschung darstellt (Hattie & Timperley, 2007; Söderström & Palm, 2024), existieren im Bereich des problemorientierten Unterrichts bisher kaum konkrete Erkenntnisse zu Feedback (Theile & Rott, 2024b). Vor allem wird Lehrkräften bislang wenig vermittelt, wie sie erkennen können, ob Schüler:innen beim Problemlösen Unterstützung benötigen und wie sie sie dann konkret, z. B. durch Feedback, unterstützen können (Herold-Blasius et al., 2019; Holzäpfel et al., 2018).

Daher beleuchten wir in diesem Beitrag, welche Aspekte aus unserer Sicht wichtig sind, um als Lehrkraft gezielt Feedback im Umgang mit problemhaltigen Aufgaben zu geben. Dafür werden zunächst konzepti-onelle Überlegungen zum Feedback im problemorientierten Unterricht vorgestellt, insbesondere, wann und welche Art von Feedback gegeben werden sollte und wie eine fundierte Entscheidung darüber getroffen werden kann. Anschließend werden beispielhaft konkrete Einblicke in die Prozessbegleitung eines Schüler:innenpaares gegeben.

Feedback

Ein sinnvolles Intervenieren in einem Problembearbeitungsprozess setzt voraus, dass die Lehrkraft die entsprechende Unterrichtssituation gut überblickt und den Bearbeitungsstand angemessen diagnostiziert (Leuders & Prediger, 2016): Verstehen die Lernenden die Aufgabe wie intendiert? Wie weit sind die Lernenden auf einem Weg zur Lösung? Welche Strategien haben sie bisher angewendet? Stecken sie in ihren Lösungsbemühungen fest? Welches mathematische Wissen fehlt den Lernenden möglicherweise? etc. Als Reaktion auf diese diagnostizierenden Fragen stellt Feedback ein zentrales Werkzeug dar, denn damit können auf Basis der Diagnose Lernende gezielt unterstützt werden (Schulz et al., 2020). Die Herausforderung bei einer Diagnose liegt jedoch darin, nicht nur die Produkte der Lernenden zu analysieren, sondern vielmehr deren Prozess der Problembearbeitung und Lösungsfindung. Gerade beim Problemlösen ist eine solche Prozessorientierung wichtig (Herold-Blasius, 2024). Erfahrungen aus der Praxis zeigen allerdings, dass Lehrkräften dies nicht immer gelingt (Herold-Blasius et al., 2019), sondern sie stattdessen häufig das Produkt fokussieren (Theile & Rott, 2024b), obwohl sich Schwierigkeiten der Lernenden besser auf der Prozessebene adressieren lassen (Holzäpfel et al., 2018). Phasenmodelle zum Problemlösen, wie etwa von Pólya (1945), verdeutlichen, dass es ein wichtiger Teil auf Prozessebene ist, zu erkennen, ob Lernende die

Aufgabenstellung verstanden haben, geeignete Lösungsideen entwickeln oder reflektierende Strategien anwenden. Um eine Auseinandersetzung mit dieser Problematik zu ermöglichen, ist ein gezielter Blick auf die Art, den Zeitpunkt und mögliche Entscheidungskriterien für Feedback sinnvoll. Daher werden in diesem Beitrag zuerst drei zentrale Fragen beleuchtet: Wann wird Feedback gegeben? Welches Feedback wird gegeben? Und wie kann eine Lehrkraft im konkreten Fall entscheiden, welche Art von Feedback angemessen ist?

Wann wird Feedback gegeben?

Die Betrachtung von Momenten der Schwierigkeiten und des Steckenbleibens ist beim Problemlösen wichtig, denn genau um deren Überwindung geht es. In diesem Beitrag vermeiden wir den Begriff der Fehler. Mit dem Fehlerbegriff würden etwa unvollständige Bearbeitungen und Zwischenstände als Strategie- bzw. Kontrollfehler verstanden. Diese müssen ja aber nicht per se „falsch" sein (Prediger & Wittmann, 2009) und sind für das Problemlösen geradezu charakteristisch und notwendig (Theile & Rott, 2024a). Genau diese prozessbezogenen Zwischenstände und unvollständigen Bearbeitungen bieten den passenden Anlass für Lehrkräftefeedback. In der Literatur wird alternativ zum Fehlerbegriff der Begriff der Barriere genutzt. Bereits Dörner (1979) hat (mathematisches) Problemlösen als den Prozess bei dem Schüler:innen bei der Bearbeitung einer Aufgabe eine Barriere überwinden müssen, um vom (unerwünschten) Anfangs- zum gewünschten Zielzustand zu kommen, definiert. Es handelt sich bei Barrieren demnach „um subjektiv schwierige Stellen im Prozess der Problembearbeitung [...], bei denen der Problemlöser seine Bearbeitung ohne Überwinden dieser Schwierigkeit nicht sicher fortsetzen kann bzw. fortsetzt" (Rott, 2013, S. 23). Damit Schüler:innen diese Barrieren zunehmend eigenständig überwinden, können verschiedene Ansätze helfen (Herold-Blasius, 2024). In allen Fällen begleitet zunächst die Lehrkraft die Problembearbeitungsprozesse und gibt den Schüler:innen abhängig von der Barriere Feedback auf verschiedenen Ebenen. Das Feedback durch die Lehrkraft wird also besonders dann relevant, wenn die Schüler:innen vor einer Barriere stehen.

Welches Feedback wird gegeben?

Wenn die Lehrkraft entscheidet, dass Feedback in einer bestimmten Situation sinnvoll ist, stellt sich die Frage nach der Art des Feedbacks. In der Forschung werden unterschiedliche Ansätze zur Beschreibung von Feedback diskutiert (Söderström & Palm, 2024). So werden etwa verschiedene Ebenen des Lernprozesses fokussiert und anschließend durch Feedback adressiert. Insgesamt werden zumeist bis zu vier Ebenen von Feedback unterschieden (Hattie & Timperley, 2007; Johnsen et al., 2017; Leiss, 2010; Narciss, 2022; Zech, 1996):

- Feedback auf Produkt-Ebene (auch einfaches Feedback genannt): alle Rückmeldungen, welche die Schüler:innen zu ihrer Interpretation der Aufgabe oder deren Ergebnis bekommen,
- Feedback auf Prozess-Ebene (auch elaboriertes Feedback genannt): alle Rückmeldungen, die sich auf Prozesse beziehen, die der Bearbeitung einer Aufgabe zugrunde liegen (z. B. strategische Rückmeldung oder das Aufzeigen alternativer Lösungswege),
- Feedback auf der personenbezogenen Ebene: alle Rückmeldungen, die sich häufig ohne konkreten Aufgabenbezug direkt an die Lernenden richten (z. B. motivationale Hilfen),
- Feedback auf organisatorischer Ebene: alle Rückmeldungen, die sich auf die Rahmenbedingungen des Lösungsprozesses beziehen (z. B. Hilfen bzgl. der Notation von Ergebnissen oder zur Nutzung von Material),
- Feedback auf Ebene der Selbstregulation: alle Rückmeldungen, die die Fähigkeit der Lernenden adressieren, ihren eigenen Lernprozess zu steuern.

Auf Basis der verschiedenen Feedbackebenen und Fehlertaxonomien haben Theile & Rott (2024b) weiterführend ein Kategoriensystem zu Feedback im problemorientierten Unterricht entwickelt, das die verschiedenen Ebenen von Feedback zusammenführt und konkrete Feedbackformen präzisiert (Abb. 1). Darin wird zunächst zwischen personen-, prozess- und produktbezogenem Feedback, sowie Feedback auf personenbezogener und organisatorischer Ebene und der Ebene der Selbstregulation unterschieden. Zusätzlich kann das Feedback auf der Prozessebene inhaltlich oder strategisch ausgerichtet sein.

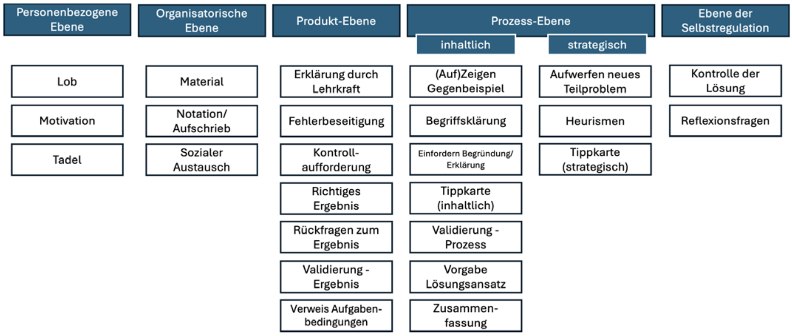


Abb. 1: Feedback-Ebenen und Feedback-Formen (Theile, 2025)

Unabhängig von der gewählten Feedbackart sollte immer Ziel sein, die Lernenden so viel wie möglich eigenständig erarbeiten zu lassen. In der Didaktik ist dieses *Prinzip der minimalen Hilfe* schon seit vielen Jahrzehnten verankert (Aebli, 1976) und auch für das mathematische Problemlösen schon lange Konsens (Zech, 1996). Dennoch können Situationen auftreten, in denen „größere" Hilfen notwendig sind, beispielsweise wenn die Konzentration der Lernenden nachlässt oder bestimmte mathematische Begriffe unklar sind. Das Prinzip der minimalen Hilfe bedeutet zudem auch nicht, dass schwächere Lernende automatisch stärkere Hilfen benötigen. Vielmehr muss bei jedem Lernenden und jedem Problembearbeitungsprozess individuell diagnostiziert werden, worin die Barriere besteht, damit anschließend das dazu passende Feedback platziert werden kann.

Wie kann eine Lehrkraft entscheiden, welche Art von Feedback angemessen ist?

Ob Hilfestellungen von Lehrkräften angemessen sind, hängt vor allem davon ab, ob diese adaptiv sind. Adaptive Hilfestellungen oder auch individualisiertes Feedback zeichnet sich durch „die optimale Passung der Lehrerhandlungen in Bezug auf die individuellen, sozialen und kognitiven Voraussetzungen der Lernenden" aus (Leiss, 2010, S. 203). Neben der Kenntnis der Lernvoraussetzungen benötigt die Lehrkraft gerade beim Problemlösen zusätzlich einen fundierten Überblick über mögliche Herangehensweisen, Lösungsansätze und erwartbare Barrieren (Prediger & Wittmann, 2009). Dafür ist es nötig, dass die Lehrkraft das Problem zunächst selbst intensiv durchdringt. Die Gesamtheit der verschiedenen Herangehensweisen, Lösungsansätze und Barrieren nennen wir in Anlehnung an Newell und Simon (1972) nachfolgend „Problemraum". Insgesamt sollte die Lehrkraft also einen soliden Überblick über den Problemraum haben, wenn sie den Problembearbeitungsprozess angemessen und zielführend durch Feedback unterstützen möchte. Angenommen eine Lehrkraft hat sich den Problemraum weniger fundiert erschlossen, dann erfasst sie die Lösungsidee der Lernenden möglicherweise nicht schnell genug oder unvollständig. Durch das gegebene Feedback würde dann möglicherweise eine potenziell zielführende Lösungsidee verworfen. Es ist also zwingend notwendig, dass sich Lehrkräfte intensiv mit der Erschließung des Problemraums beschäftigen. Exemplarisch erfolgt dies an der Eis-Aufgabe aus dem Primarbereich.

Problemraum-Erschließung der Eis-Aufgabe

> Anne möchte sich ein Eis kaufen. Sie hat Geld für zwei Kugeln Eis. Der Eisverkäufer bietet drei Eissorten an: Schoko, Vanille und Himbeere. Wie viele verschiedene Möglichkeiten hat Anne, die Eissorten zu kombinieren? Bist du dir sicher, dass du alle gefunden hast?

Problemraum: Produkt-Ebene

Die Eis-Aufgabe (in Anlehnung an Rasch, 2006) ist eine klassische Aufgabe der Kombinatorik, bei deren Bearbeitung grundsätzlich zwei Komponenten berücksichtigt werden müssen: die Reihenfolge der Kugeln (Permutation oder Kombination) und die Frage, ob sich Sorten wiederholen können (mit oder ohne Wiederholung) (Padberg & Büchter, 2015). Daraus ergeben sich mathematisch die folgenden Lösungsmöglichkeiten:

Permutation mit Wiederholung, d. h. die Reihenfolge der Kugeln ist relevant (z. B. auf einem Hörnchen) und die gleiche Sorte darf mehrfach gewählt werden (z. B. zweimal Vanille): Möglichkeiten,

Permutation ohne Wiederholung, d. h. die Reihenfolge der Kugeln ist relevant (z. B. auf einem Hörnchen) und jede Sorte darf nur einmal gewählt werden: Möglichkeiten,

Kombination mit Wiederholung, d. h. die Reihenfolge der Kugeln ist nicht relevant (z. B. in einem Becher) und die gleiche Sorte darf mehrfach gewählt werden: Möglichkeiten,

Kombination ohne Wiederholung, d. h. die Reihenfolge der Kugeln ist nicht relevant (z. B. in einem Becher) und jede Sorte darf nur einmal gewählt werden: Möglichkeiten.

Insgesamt gibt es also auf Ebene des Produkts vier verschiedene Lösungsmöglichkeiten, die abhängig von den angenommenen Ausgangskomponenten alle zulässig sind.

Problemraum: Prozess-Ebene

Zu den Lösungsmöglichkeiten gelangen die Schüler:innen durch verschiedene Problemlösestrategien (auch Heurismen genannt). Groß et al. (2015) konnten in einer Studie mit 59 Dritt- und 83 Viertklässler:innen häufige Strategien bei der Bearbeitung solch kombinatorischer Aufgaben herausarbeiten. So sind erwartbare heuristische Strategien etwa das unsystematische Probieren, in seltenen Fällen (2 % der Dritt- und 8 % der

Viertklässler:innen) auch systematisches Probieren. Zusätzlich nutzen die Schüler:innen das Vorwärtsarbeiten und in diesem Sinne das Generieren von Beispielen. Auch das Nutzen von Analogien, denn im Rahmen der Studie wurden mehrfach solche kombinatorischen Aufgaben präsentiert, wurde als Strategie identifiziert.

Auf Basis einer stoffdidaktischen Aufgabenanalyse sind darüber hinaus auch andere Problemlösestrategien denkbar. So könnten Schüler:innen etwa eine Zeichnung oder eine Tabelle anfertigen und auf diese Art und Weise systematisch vorgehen. Das systematische Vorgehen kann z. B. durch den Einsatz verschiedener Farben unterstützt werden (Herold-Blasius, 2024).

Zentral ist bei solchen kombinatorischen Aufgaben das systematische Vorgehen. Zu irgendeinem Zeitpunkt im Prozess ist eine Systematik notwendig, um sich bzgl. der Vollständigkeit der Möglichkeiten sicher zu sein. Wie und wann eine Systematik letztlich entsteht, spielt dabei erstmal keine Rolle. Wir unterscheiden hier drei Fälle:

1. Der Lernende findet ein paar Beispiele und sortiert diese hinterher. In diesem Fall wird die Systematik nach dem Finden von Beispielen genutzt, um die Vollständigkeit der gefundenen Lösungen zu überprüfen und ggf. die fehlenden Lücken zu identifizieren.
2. Der Lernende findet erste Beispiele und variiert dann zunehmend systematisch die Eiskugeln, z. B. über eine Elementfixierung.
3. Der Lernende geht direkt systematisch vor.

Für die Lehrkraft ist es an dieser Stelle wichtig zu realisieren, dass die Systematik nicht von Anfang an da sein muss. Die Schüler:innen dürfen sich das auch erst zu einem späteren Zeitpunkt erarbeiten, vielleicht sogar erst im gemeinsamen Klassengespräch.

Insgesamt ist es für eine Lehrkraft notwendig, sich über die verschiedenen Ebenen von Problemlöseaufgaben im Klaren zu sein und so ein möglichst vollständiges Bild über den Problemraum zu entwickeln. So soll ein trichterförmiges Lenken in eine bestimmte Richtung vermieden werden. Für eine feedbackgestützte Begleitung ist also ein fundiertes fachwissenschaftliches und fachdidaktisches Hintergrundwissen unabdingbar.

Exemplarische Einblicke: Feedback & Problemraum

Wie kann nun eine prozessorientierte Begleitung mittels Feedback beim mathematischen Problemlösen konkret aussehen? Und welche Rolle spielt dabei der Problemraum der jeweiligen Aufgabe? Im Rahmen des Projekts „ProStrategIn: Mathematisches Problemlösen mit Strategieschlüsseln bei inklusiven Schüler:innen fördern“ (gefördert durch die TU Young Academy der TU Dortmund) wurde ein Training zur Förderung mathematischer Problemlösestrategien[1] für Primarstufenschüler:innen mit besonderen Schwierigkeiten beim Mathematiklernen (Gaidoschik et al., 2021) oder mit dem sonderpädagogischen Unterstützungsbedarf (spU) Lernen entwickelt und erprobt. In zwei Erhebungsphasen (Sommer 2023 und Frühjahr 2024) wurden insgesamt drei leistungsschwache Schüler:innenpaare sowie ein Schüler mit dem spU Lernen bei dem Training begleitet und videografiert. Als Grundlage für diesen Beitrag dient der Bearbeitungsprozess des Tandems Samir und Selma[2] vom Frühjahr 2024.

Fallbeispiel: Prozessbegleitung Samir und Selma

Samir und Selma sind zwei Viertklässler:innen einer nordrhein-westfälischen Grundschule in sozial besonders herausfordernder Lage gemäß des Standorttyps 7 (Schräpler & Jeworutzki, 2021). Sie haben im Rahmen des Projekts ProStrategIn unter anderem die zuvor vorgestellte Eis-Aufgabe bearbeitet. Zu Beginn wurde den beiden Schüler:innen die Aufgabe mittels eines Aufgabenvideos auf einem Tablet vorgelesen, um das Lese- und damit das Aufgabenverständnis zu unterstützen (Herold-Blasius et al., 2023). Eine Interviewerin begleitet den Problembearbeitungsprozess und unterstützt die Schüler:innen durch Feedback auf verschiedenen Ebenen. Innerhalb des Prozesses konnten 30 Feedback-Situationen[3] identifiziert werden, in denen Feedback auf allen Ebenen erkennbar ist. Einzige Ausnahme bildet Feedback auf Ebene der Selbstregulation. Spannend ist dabei die Betrachtung des Feedbacks im zeitlichen Verlauf (Abbildung 2). Grob lässt sich der zeitliche Verlauf in vier Phasen unterteilen, die sich durch unterschiedliche Schwerpunktsetzungen im gewählten Feedback unterscheiden: (1) Fokus auf produktorientiertes Feedback (Zeilen 1–9), (2) Mischform (Zeilen 10–16), (3) Fokus auf prozessorientiertes Feedback (Zeilen 15–26), (4) Abschluss des Problembearbeitungsprozesses (Zeilen 27–30).

1 Das Training ist öffentlich frei zugänglich unter: https://wwwold.mathematik.tu-dortmund.de/sites/herold-blasius/problemloesen-foerdern (04.12.2024).

2 Die Namen der Schüler:innen sind gemäß der Einverständniserklärung anonymisiert. Geschlecht und kultureller Hintergrund sind beibehalten.

3 In einer Feedbacksituation kann das Feedback einer Lehrkraft mehrere Formen annehmen, indem bspw. die Lehrkraft zunächst Schüler:innen auffordert, bisherige Ergebnisse zu notieren und im Anschluss darauf verweist, dass auch das Material genutzt werden darf (Kategorien: *Notation/ Aufschrieb* und *Material*). Zum Teil können dadurch in einer Feedbacksituation unterschiedliche Ebenen des Lernprozesses adressiert werden.

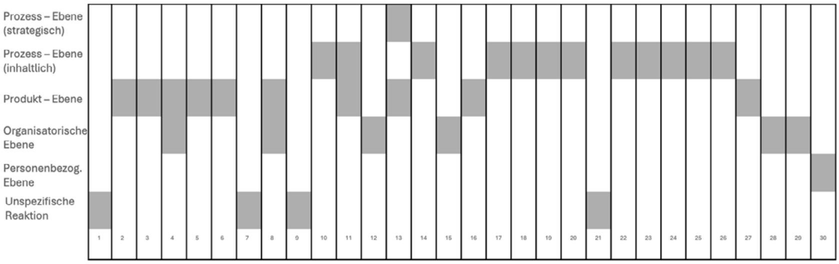


Abb. 2: Feedback im zeitlichen Verlauf

Phase 1 – Fokus produktorientiertes Feedback

Zu Beginn des Problemlöseprozesses (Feedbacksituation 1–9 in Abb. 2) gibt die Interviewerin Feedback v.a. auf der organisatorischen (z. B. Zeile 2 im Transkript) und produktorientierten Ebene (z. B. Zeile 4 im Transkript). Auf organisatorischer Ebene umfasst das Feedback v. a. Hinweise zur äußeren Strukturierung des Arbeitsprozesses (z. B. Aufforderung zur Nutzung von Material (hier Steckwürfel) oder zum Notieren erster Ergebnisse)[4]:

Zeile 1 *S_1: Ich glaube, die nimmt Vanille und Schoko.*

Zeile 2 *I: Ok, dann schreib das doch erstmal auf, das ist ja eine Möglichkeit.*

Zeile 3 *S_2: Wo denn, zu Antwortsatz?*

Zeile 4 *I: Nee das ist ja nicht der Antwortsatz, der Antwortsatz ist später dran, jetzt versuchen wir erstmal rauszufinden, wie viele verschiedene Möglichkeiten Anne hat, um sich Eis auf ihr, Kugeln drauf zu machen auf ihr Eis. Schoko und Vanille ist eine Möglichkeit.*

Zusätzlich unterstreicht die Interviewerin in diesem Transkriptausschnitt, dass die Kombination Schoko und Vanille eine mögliche Kombination darstellt (Zeile 4 im Transkript). Weiteres Feedback in dieser Phase beschränkt sich v. a. auf die Validierung erster Ergebnisse sowie die Erinnerung an die Bedingungen der Aufgabenstellung (Anzahl der Kugeln und Eissorten).

Phase 2 – Mischform

Die zweite Phase (Feedbacksituation 10–16 in Abbildung 2) ist durch einen Wechsel von produkt- und prozessorientiertem Feedback geprägt. Besonders markant ist in dieser Phase die folgende Situation: Die Schüler:innen ermitteln drei Möglichkeiten, wie die Eissorten kombiniert

---

4 Im Folgenden handelt es sich um geglättete Transkriptausschnitte, um eine bessere Lesbarkeit zu ermöglichen.

werden können (entspricht der Kombination ohne Wiederholung) – „Schoko Vanille, Schoko Himmber [sic!], Himmbere [sic!] Vanille“ – und geben an, dass dies alle möglichen Kombinationen seien. Zunächst fordert die Interviewerin die Schüler:innen auf, zu begründen, wieso sie sich sicher seien, dass dies alle Kombinationen sind. Dies wird von den Schüler:innen nicht beantwortet. Daraufhin stellt die Interviewerin die Frage, ob es von Bedeutung ist, welche Eiskugel zuerst gewählt wird. Auf die bejahende Antwort der Schüler:innen hin erläutert sie, es gäbe dann noch mehr Kombinationen. An dieser Stelle wird deutlich, wie wichtig eine Kenntnis des Problemraums ist. Der Fokus der Schüler:innen wird hier bewusst auf eine weitere, bisher von ihnen noch nicht beachtete Lösungsmöglichkeit gelenkt. Gemeinsam entscheiden Samir und Selma, dass es sinnvoll wäre, dies zu berücksichtigen. Der Interviewerin scheinen die verschiedenen Lösungsmöglichkeiten bewusst zu sein. Sie gibt ein adaptives Feedback, um die Schüler:innen zu Begründungen anzuregen und auf deren jeweilige Lösung einzugehen.

Phase 3 – Fokus prozessorientiertes Feedback

Mit fortschreitender Bearbeitung von Samir und Selma gibt die Interviewerin zunehmend prozessorientiertes Feedback (Feedbacksituation 17–26 in Abbildung 2). Besonders auffällig ist die wiederholte Aufforderung der Interviewerin, Begründungen für gewählte Vorgehensweisen zu geben. Durch Fragen wie „Wieso seid ihr euch denn sicher, dass ihr alle Möglichkeiten gefunden habt?“ oder „Wie seid ihr beim Probieren vorgegangen?“ wird das eigenständige Denken der Schüler:innen angeregt, Kommunikation gefördert und der Problembearbeitungsprozess immer weiter in den Mittelpunkt gestellt.

Phase 4 – Abschluss des Problembearbeitungsprozesses

Am Ende ihres Problembearbeitungsprozesses (Feedbacksituation 27–30 in Abbildung 2) haben Samir und Selma alle neun Möglichkeiten (also Permutation mit Wiederholung) gefunden. Das Feedback der Interviewerin adressiert nun überwiegend die Notation der Lösung und schließt mit einem Lob für den gelungenen Problembearbeitungsprozess ab.

Fazit

Bei dem Problembearbeitungsprozess von Samir und Selma handelt es sich um eine Fördermaßnahme für Schüler:innen mit besonderen Schwierigkeiten im Mathematikunterricht. Die intensive Begleitung der Problembearbeitungsprozesse durch die Zweitautorin bietet optimale Bedingungen, denn so steht das Tandem im Vordergrund und potenzielle Ablenkungen sind stark reduziert. Im regulären Mathematikunterricht sind die Bedingungen andere (z. B. Autor:innengruppe Bildungsberichterstattung, 2024; Korff, 2018; Grassinger et al., 2022). Wenig überraschend zeigt sich daher, dass in den meisten Unterrichtssituationen Feedback auf Ebene des Produkts die häufigste Feedbackform ist (Theile & Rott, 2024b). Neben den strukturellen Aspekten führen vermutlich auch andere Gründe zu dieser Tendenz, z. B. mangelnde Erfahrung im Umgang mit dem Problemlösen oder fachliche Unsicherheiten (Herold-Blasius et al., 2019; Gebel et al., 2023). Umso bedeutender ist die vorherige Erschließung des Problemraums. Lehrkräfte sollten sich die möglichen Lösungswege mit Bezug auf das Ergebnis, erwartbare Strategien sowie die potenziellen Barrieren im Lösungsprozess einer Aufgabe erarbeiten (Herold-Blasius & Winkel, 2025). Nur so können sie gezielt produkt- und prozessorientiertes Feedback geben.

Zusammenfassend verdeutlichen die Ausführungen dieses Beitrags, dass eine reine Produktorientierung beim mathematischen Problemlösen nicht ausreicht. Stattdessen plädieren wir dafür, weniger auf Fehler und Produkte zu fokussieren und die Problembearbeitung selbst sowie den damit einhergehenden Prozess in den Blick zu nehmen. So kann schließlich auch die Förderung mathematischer Basiskompetenzen durch die prozessbezogene Kompetenz Problemlösen gelingen (Götze et al., 2024). Diese Ausrichtung stellt jedoch hohe fachliche und fachdidaktische Anforderungen an Lehrkräfte (Benz et al., 2015; Herold-Blasius & Winkel, 2025). Eine kompetente Prozessbegleitung setzt u. a. eine fundierte Auseinandersetzung mit dem Problemraum, aber auch Kenntnis über mögliche Feedbackstrategien voraus. Nicht nur, aber auch deswegen unterstreichen wir daher die Wichtigkeit gut ausgebildeter Lehrkräfte, die in der Lage sind, die komplexen Anforderungen einer prozessorientierten Begleitung zu bewältigen. Um dies zu erreichen, sollte die Lehrkräfteprofessionalisierung mit Blick auf das mathematische Problemlösen weiter ausgebaut werden.

Förderhinweis

Das Projekt „ProStrategIn: Mathematisches Problemlösen mit Strategieschlüsseln bei inklusiven Schüler:innen fördern“ (Projektlaufzeit: 2023–2024) wurde gefördert durch die TU Young Academy der TU Dortmund.

Literaturverzeichnis

Aebli, H. (1976). *Grundformen des Lehrens. Ein Beitrag zur psychologischen Grundlegung der Unterrichtsmethode* (9. Aufl.). Klett.

Autor:innengruppe Bildungsberichterstattung (2024). *Bildung in Deutschland 2024. Ein indikatorengestützter Bericht mit einer Analyse zu beruflicher Bildung.* wbv Publikation.

Benz, C., Peter-Koop, A. & Grüßing, M. (2015). *Frühe mathematische Bildung. Mathematiklernen der Drei- bis Achtjährigen.* Springer.

Dörner, D. (1979). *Problemlösen als Informationsverarbeitung* (2. Aufl.). Kohlhammer.

Gaidoschik, M., Moser Opitz, E., Nührenbörger, M., & Rathgeb-Schnierer, E. (2021). *Besondere Schwierigkeiten beim Mathematiklernen.* Mitteilungen der Gesellschaft für Didaktik der Mathematik, 47(111S), 3–19.

Gebel, I., Kuzle, A., & Sturm, N. (2023). „Status quo" des Problemlöseunterrichts in der Grundschule: Wird der Kompetenzbereich (weiterhin) vernachlässigt? In N. Sturm, L., Baumanns, & B. Rott (Hrsg.), *Online-Herbsttagung 2021 des GDM-Arbeitskreises Problemlösen* (S. 131–149). WTM.

Götze, D., Selter, Ch., & Herold-Blasius, R. (2024). Förderung prozessbezogener Kompetenzen. In M. Götz, A. Hartinger, F. Heinzel, J. Kahlert, S, Miller, & U. Sandfuchs (Eds.), *Handbuch Grundschulpädagogik und Grundschuldidaktik* (S. 594–600). Klinkhardt.

Grassinger, R., Hodaie, N, Immerfall, S., Kürzinger, A., & Schnebel, S. (Hrsg.) (2022). *Heterogenität in Grundschulen. Mehrperspektivische Zugänge.* Waxmann.

Groß, J., Gouasé, N., Rasch, R. & Schnotz, W. (2015). Which heuristic operations do primary school students use when solving complex story problems? In W. Schnotz et al. (Hrsg.), *Multidisciplinary Research on Teaching and Learning* (S. 187–200). Macmillan Publishers.

Hattie, J., & Timperley, H. (2007). The Power of Feedback. *Review of Educational Research,* 77(1), 81–112. 10.3102/003465430298487

Herold-Blasius, R. (2024). *The role of strategy keys in enhancing heuristics and self-regulation in mathematical problem-solving: A qualitative, explorative, and type-building study with primary school students. Investigations in Mathematics learning,* 1–20. 10.1080/19477503.2024.2430135

Herold-Blasius, R., Holzäpfel, L., & Rott, B. (2019). Problemlösestrategien lehren lernen—Wo die Praxis Probleme beim Problemlösen sieht. In A. Büchter, M. Glade, R. Herold-Blasius, M. Klinger, F. Schacht, & P. Scherer (Hrsg.), *Vielfältige Zugänge zum Mathematikunterricht. Konzepte und Beispiele aus Forschung und Praxis* (S. 295–309). Springer.

Herold-Blasius, R., Kneip, S., & Koenen, B. (2023). *Strategieschlüssel und Erklärvideos.* Mathematik 5-10, 62, 10–13.

Herold-Blasius, R., & Winkel, K. (2025). Förderung von Problemlösekompetenzen bei Kindern mit besonderen Schwierigkeiten beim Mathematiklernen. In J. Sjuts & E. Vásárhelyi (Hrsg.), *Schlüssel zum Erfolg: Kognitive und metakognitive Prozesse beim Verstehen von Mathematik* (Bd. 7) (S. 27–50). WTM.

Holzäpfel, L., Lacher, M., Leuders, T., & Rott, B. (2018). *Problemlösen lehren lernen: Wege zum mathematischen Denken*. Klett/Kallmeyer.

Janott, S. (2021). *Problemlösen zum Lerngegenstand machen: Eine Studie im Mathematikunterricht der Grundschule.* WTM.

Johnsen, C. I., Bailey, S. K. T., & Van Buskirk, W. L. (2017). Designing Effective Feedback Messages in Serious Games and Simulations: A Research Review. In P. Wouters & H. Van Oostendorp (Hrsg.), *Instructional Techniques to Facilitate Learning and Motivation of Serious Games* (S. 119–140). Springer International.

Korff, N. (2018). *Inklusiver Mathematikunterricht in der Primarstufe. Erfahrungen, Perspektiven und Herausforderungen* (3., unveränderte Aufl.). Schneider Verlag.

Leiss, D. (2010). Adaptive Lehrerinterventionen beim mathematischen Modellieren–empirische Befunde einer vergleichenden Labor- und Unterrichtsstudie. *Journal für Mathematik-Didaktik,* 31(2), 197–226. 10.1007/s13138-010-0013-z

Leuders, T., & Prediger, S. (2016). *Flexibel differenzieren und fokussiert fördern im Mathematikunterricht.*

Mason, J., Burton, L., & Stacey, K. (1982). *Thinking Mathematically.* Addison-Wesley Publ.

Narciss, S., Prescher, C., Khalifah, L., & Körndle, H. (2022). Provding external feedback and prompting the generation of internal feedback fosters achievement, strategies and motivation in concept learning. *Learning and Instruction,* 82, 101658. 10.1016/j.learninstruc.2022.101658

Newell, A., & Simon, H. A. (1972). *Human Problem Solving.* Prentice-Hall Inc.

Padberg, F., & Büchter, A. (2015). *Einführung Mathematik Primarstufe—Arithmetik* (2. Aufl.). Springer Spektrum. 10.1007/978-3-662-43449-9

Pehkonen, E., Näveri, L., & Laine, A. (2013). On Teaching Problem Solving in School Mathematics. *Center for Educational Policy Studies Journal,* 3(4), 9–23. 10.26529/cepsj.220

Pólya, G. (1945). *How to solve it.* Princeton University Press.

Prediger, S., & Wittmann, G. (2009). Aus Fehlern lernen—(Wie) ist das möglich? *Praxis der Mathematik - Sekundarstufen 1 und 2*, 51(27), 1–8.

Rasch, R. (2006). 42 *Denk- und Sachaufgaben. Wie Kinder mathematische Aufgaben lösen und diskutieren.* Kallmeyer.

Rott, B. (2013). *Mathematisches Problemlösen: Ergebnisse einer empirischen Studie.* WTM.

Rott, B. (2016). „Fehler“ in Problembearbeitungsprozessen—Eine fachdidaktische Analyse. *Der Mathematikunterricht,* 3, 13–20.

Schoenfeld, A. (1985). *Mathematical Problem Solving.* Academic Press.

Schräpler, J.-P., & Jeworutzki, S. (2021). *Konstruktion des Sozialindex für Schulen.* https://www.schulministerium.nrw/system/files/media/document/file/konstruktion_des_sozialindex_fuer_schulen.pdf (18.07.2025)

Schulz, A., Leuders, T., & Rangel, U. (2020). The Use of a Diagnostic Competence Model About Children's Operation Sense for Criterion-Referenced Individual Feedback in a Large-Scale Formative Assessment. *Journal of Psychoeducational Assessment,* 38(4), 426–444. 10.1177/0734282918823590

Shute, V. J. (2008). Focus on Formative Feedback. *Review of Educational Research,* 78(1), 153–189. https://doi.org/10.3102/0034654307313795

Söderström, S., & Palm, T. (2024). Feedback in mathematics education research: A systematic literature review. *Research in Mathematics Education,* 1–22. /10.1080/14794802.2024.2401488

Söhling, A.-C. (2019). Zur Wirkungsweise von Hilfen beim Problemlösen. In B. Brandt, & K. Tiedemann (Hrsg.), *Mathematiklernen aus interpretativer Perspektive I. Aktuelle Themen, Arbeiten und Fragen* (S. 37–54). Waxmann.

Theile, Y. (2025). *Kodiermanual „Feedback im problemorientierten Unterricht“.* Universität zu Köln. https://mathedidaktik.uni-koeln.de/sites/mathedidaktik/Theile/Kodiermanual_Feedback_im_MU_neu__Juni_2025_.pdf

Theile, Y., & Rott, B. (2024a). Fehler im Problemlöseunterricht—Analyse des Fehlerumgangs von Lehrkräften beim Problemlösen. *Der Mathematikunterricht,* 70(4), 14–24.

Theile, Y., & Rott, B. (2024b). Formative feedback in problem-solving lessons in German primary schools. *Proceedings of FAME1 (ETC14)*, 270–273. 10.5281/zenodo.14231455

Zech, F. (1996). *Grundkurs Mathematikdidaktik. Theoretische und praktische Anleitung für das Lehren und Lernen von Mathematik* (8. Aufl.). Beltz.

Algebraisches Denken über die Grundschule hinaus

Sebastian Rezat

Abstract

Die Mathematikdidaktik hat vielfach die Problematik an allen institutionellen Übergängen im Bildungssystem erkannt, aus verschiedenen Perspektiven untersucht und konkrete Vorschläge zu ihrer förderlichen Gestaltung gemacht. Die Sicherung von Basiskompetenzen spielt an den jeweiligen Übergängen stets eine Rolle. Am Übergang von der Primar- zur Sekundarstufe wurden inhaltlich die Zahlbereichserweiterungen und der Übergang von der Arithmetik zur Algebra verstärkt von der Forschung in den Blick genommen. Dabei wurden ein solides Zahlverständnis im Bereich der natürlichen Zahlen als Voraussetzung für die Zahlbereichserweiterung zu den Bruchzahlen und ein solide entwickelter Bruchzahlbegriff als Prädiktor für den Lernerfolg in der Algebra identifiziert. Die Förderung algebraischen Denkens, die in der Grundschule im Bereich der natürlichen Zahlen fester Bestandteil des Curriculums ist, wird im Bereich der Zahlbereichserweiterungen jedoch kaum fortgesetzt. Im Fokus des Beitrags steht die Schnittmenge zwischen den Zahlbereichserweiterungen und der Förderung algebraischen Denkens. Dabei werden Forschungsbefunde und Ansätze zur Förderung algebraischen Denkens im Zusammenhang mit den Zahlbereichserweiterungen zusammengetragen und in Beziehung zu den Basiskompetenzen gesetzt.

Algebraisches Denken, Propädeutik der Algebra, Early Algebra, Zahlbereichserweiterung, Bruchzahlen, negative Zahlen, rationale Zahlen.

Einleitung

Die Mathematikdidaktik hat vielfach die Problematik an allen institutionellen Übergängen im Bildungssystem erkannt, näher untersucht und konkrete Vorschläge zu ihrer förderlichen Gestaltung gemacht (Gueudet et al., 2016). Für die beiden Übergänge vom frühkindlichen Bildungsbereich in die Grundschule und von der Grundschule in die weiterführende Schule haben u. a. Peter-Koop et al. (2006) zentrale Aspekte herausgearbeitet. Gerade an den Übergängen wird inhaltlich immer wieder die Frage nach mathematischen Basiskompetenzen als Grundlage für den Kompetenzerwerb in der Folgeinstitution laut. Zentrale Aspekte der Übergänge betreffen aber nicht nur die fachlich-inhaltliche Gestaltung, sondern auch Aspekte der

Selbstregulation sowie institutionelle, akademische und soziale Aspekte.

Bei der Auseinandersetzung mit dem Übergang von der Primar- zur Sekundarstufe wurden curriculare Entwicklungen spezifischer Inhaltsbereiche bislang nur vereinzelt und exemplarisch in den Blick genommen. Eine Ausnahme stellen hier die Zahlbereichserweiterungen (z. B. Van Dooren et al., 2015) und die Algebra dar, die vielfach als „gatekeeper" für den MINT-Bereich angesehen wird.

> As a matter of fact, algebra has long been the "transition topic" par excellence, marking the frontier between elementary and secondary education. We can thus interpret research on early algebra as the first attempt to blur the frontier by introducing a properly secondary content at primary school. (Gueudet et al., 2016, S. 18)

Bei der Early Algebra geht es jedoch nicht primär um die Verlagerung von Sekundarstufeninhalten in die Primarstufe. Vielmehr steht die Förderung algebraischer Denkweisen im Bereich der Arithmetik im Vordergrund, um den inhaltlichen Übergang von der Arithmetik zur symbolischen Schulalgebra zu unterstützen (Carraher & Schliemann, 2014). Damit soll die von Linchevski und Herscovics (1996) als „cognitive gap" oder von Kaput (2008) als „algebra problem" bezeichnete Diskontinuität zwischen Arithmetik und Algebra verringert werden. Zu den Teilfähigkeiten, die im Rahmen der Early Algebra gefördert werden, gehören auch zentrale mathematische Basiskompetenzen, z. B. das Verständnis von Operationen, das Teil-Ganzes Verständnis und die Entwicklung eines relationalen Zahlverständnisses (vgl. z. B. Moser Opitz, 2009).

Weitestgehend unberücksichtigt blieb in der Bemühung um propädeutische Behandlung algebraischer Denkweisen im Bereich der Arithmetik, dass letztere vorrangig im Bereich der natürlichen Zahlen betrieben wird und in Einführung der symbolischen Algebra üblicherweise im Bereich der rationalen Zahlen erfolgt. Zwischen der Beschäftigung mit natürlichen Zahlen und der Einführung der Algebra wird im Curriculum die Zahlbereichserweiterung von den natürlichen Zahlen zu den rationalen Zahlen vollzogen. Dies erfolgt üblicherweise in zwei Schritten: Zunächst werden die positiven rationalen Zahlen eingeführt und dann die negativen.

Während es Ansätze zur Förderung algebraischen Denkens über die Zahlbereichserweiterungen hinweg bis zur Einführung der Algebra kaum gibt, wird dem Verständnis der rationalen Zahlen jedoch für eine erfolgreiche Auseinandersetzung mit der Algebra eine große Bedeutung beigemessen. So werden beispielsweise Kompetenzen im Bereich der Bruchrechnung als Prädiktor für den Erfolg in der Algebra angesehen (vgl. z. B. Hurst & Cordes, 2018). Im Zusammenhang mit den negativen Zahlen geht Jahnke (2003) sogar so weit, dass er die mit der Einführung der negativen Zahlen in der Sekundarstufe I verfolgte Intention im algebraischen Kalkül sieht.

Insgesamt wurde die Verbindungen der beiden Übergangsthemen Zahlbereichserweiterungen und Propädeutik der Algebra bislang kaum beachtet (Rezat, 2019). In den letzten Jahren ist diese Bruchstelle jedoch verstärkt in den Blick geraten. Wie algebraische Denkweisen im Bereich der positiven und negativen rationalen Zahlen gefördert werden sollen, ist Gegenstand dieses Beitrags.

Rationale Zahlen und algebraisches Denken

Positive rationale Zahlen

In mehreren Studien wurde nachgewiesen, dass die Kenntnisse im Bereich der positiven rationalen Zahlen im Vergleich zu anderen mathematischen Grundlagen aber auch im Vergleich zu anderen Variablen ein wesentlicher Prädiktor für die Fähigkeiten in der Algebra sind (Liang et al., 2018). Booth und Newton (2012) bezeichnen die Bruchrechnung daher als „doorman" des „gatekeepers" Algebra.

Peter-Koop und Specht (2011, S. 16) geben einen Überblick über inhaltliche Schwerpunkte beim Lehren und Lernen der Bruchrechnung. Diese Liste umfasst „übergeordnetes Verständnis", „Teil-Ganzes", „Verbindung von Konzepten und Symbolen", „Brüche als Zahlen", „Brüche als Division", „Relative Größe" und „Rechnen mit Brüchen". Die Bedeutung der Mehrzahl dieser inhaltlichen Schwerpunkte der Bruchrechnung für das Erlernen der Algebra wurde in verschiedenen Studien gezeigt.

Das Teil-Ganzes-Verständnis, das auch als wichtige Basiskompetenz angesehen wird (vgl. z. B. Moser Opitz, 2009), wurde als wichtiger Faktor einerseits für das Verständnis von Bruchzahlen aber auch für das Verständnis der Algebra nachgewiesen (Hackenberg, 2013; Viegut et al., 2024). Dazu gehört einerseits die Koordinierung von zusammengesetzten Einheiten mit hierarchisch verschachtelten additiven und multiplikativen Beziehungen (Viegut et al., 2024), aber auch ein flexibler Umgang mit den Teilen zum Ganzen. Hackenberg (2013, S. 541) unterscheiden in diesem Zusammenhang fünf verschiedene Bruchschemata, und zwar das „Parts-within-wholes fraction scheme", das „Part-whole fraction scheme", das „Partitive unit fraction scheme", das „Partitive fraction scheme" und das „Iterative fraction scheme". Dieser Liste liegt eine Progression zunehmend flexibler Umgangsweisen mit den Teilen zum Ganzen zugrunde.

Brüche als Zahlen zu verstehen, wurde insbesondere im Zusammenhang mit der Größenvorstellung zu Brüchen untersucht. Die entsprechenden Aufgabenformate verlangen das Einzeichnen von Brüchen auf dem Zahlenstrahl und den Vergleich von Brüchen. Die Größenvorstellung von Brüchen wurde als erster Prädiktor für algebraische Fähigkeiten identifiziert (Booth & Newton, 2012; Booth et al., 2014) jedoch dann von spezifischeren Prädiktoren abgelöst.

Brüche als Division zu verstehen, wurde von Peck und Matassa (2016) als wichtige Voraussetzung für algebraische Denkweisen herausgestellt. Die Autoren stellen fest, dass Lernenden vielfach ein Verständnis des Bruchstriches als Zeichen für eine Division fehlt und sie damit die Bruchdarstellung nicht sowohl als eine Divisionsaufgabe als auch als das Ergebnis einer Divisionsaufgabe auffassen können. Lösungen von Aufgaben, werden daher häufig als dezimale Annäherungen angegeben anstelle des exakten Wertes in Form einer Bruchzahl. Gerade dieses doppelte Verständnis des Bruches als Aufgabe und Ergebnis einer Division sei jedoch gemäß den Autoren zentral für die Algebra. Mit diesem Hinweis auf die duale Bedeutung von Symbolen als Prozess und Objekt im Bereich der Brüche verweisen die Autoren auf einen Aspekt, der wiederholt als zentral für die Algebra betont wurde (Hefendehl-Hebeker & Rezat, 2023). Radford (2010) bezeichnet ihn als Objektivierung, Sfard (1995) als „Reification". Auch für das Gleichheitszeichen wurde der Aufbau eines relationalen Verständnisses anstelle der Aufgabe-Ergebnis-Deutung als fundamental für die algebraische Verwendung des Gleichheitszeichens herausgearbeitet (Winter, 1982).

Schließlich konnten auch Kompetenzen im Rechnen mit Brüchen als wichtiger Einflussfaktor auf Kompetenzen in der Algebra identifiziert werden. Barbieri et al. (2021) zeigen, dass die Fähigkeiten beim Rechnen mit Brüchen die Varianz in den Algebrakenntnissen der Versuchsgruppe aufklären können.

Konkrete Vorschläge zur Thematisierung der einzelnen Aspekte im Hinblick auf die Förderung algebraischer Denkweisen im Rahmen der Zahlbereichserweiterung zu den positiven rationalen Zahlen können aus den in den oben genannten Studien verwendeten Aufgaben abgeleitet werden. Untersucht wurden u. a. Umkehraufgaben in der Bruchrechnung, bei denen der Anteil gegeben ist und das Ganze gesucht wird (Pearn et al., 2022). Vergleichbare Aufgaben wurden auch von Peter-Koop und Specht (2011) im Rahmen eines diagnostischen Interviews eingesetzt, um individuelle Förderungen für die Bruchrechnung zu konzipieren. Weitere in der Forschung eingesetzte Aufgaben betreffen Probleme gerechter Teilung (Peck & Matassa, 2016) und Messprobleme, in denen eine Länge mit einer anderen Länge ausgemessen werden soll, wobei das gemeinsame Maß jeweils ein Bruchteil einer Länge ist (Eriksson & Sumpter, 2021). Diese Aufgaben gehen allerdings nicht über eine vielperspektivische Auseinandersetzung mit Bruchzahlen mit dem Ziel eines flexiblen Umgangs mit diesen hinaus. Weitere Vorschläge zur spezifischen Förderung algebraischer Denkweisen im Rahmen der Zahlbereichserweiterung zu den positiven rationalen Zahlen sind rar.

Bastable und Schifter (2008) schlagen vor, die bekannten Rechenregeln aus dem Bereich der natürlichen Zahlen auf ihre Geltung im erweiterten

Zahlbereich zu prüfen, und betonen dabei den Generalisierungsaspekt algebraischen Denkens. Konkret zeigen sie eine mögliche Thematisierung der Konstanzgesetze der Multiplikation im Bereich der positiven rationalen Zahlen auf.

Insgesamt besteht bei der Adaption und Entwicklung von produktiven Aufgaben zur Bruchrechnung, die zentrale Ideen der Förderung algebraischen Denkens aus dem Primarbereich in die Sekundarstufe fortsetzen, aber weiterer Entwicklungs- und Forschungsbedarf.

Negative rationale Zahlen

Rezat (2019) hat die Zusammenhänge zwischen der Zahlbereichserweiterung zu den ganzen Zahlen und dem algebraischen Denken aus epistemologischer, psychologischer und didaktischer Perspektive eingehend analysiert. Seine Ergebnisse fasst er wie folgt zusammen:

> From an epistemological perspective [...], I have shown that the development of the negative number concept is closely linked to core algebraic ideas, such as indeterminate objects and their analytic treatment, reification and objectification, and a detachment from content meanings in order to proceed to a formalized view. The psychological analysis showed that the same obstacles [as in the epistemological development] characterize students‘ learning of the negative number concept regardless of their prior knowledge and their prior experiences in the set of natural numbers. So far, the effects of early algebra on students' understanding of negative numbers has [*sic*] not been investigated. The analysis from the pedagogical perspective has shown that two important goals related to the learning of natural numbers, namely the development of algebraic thinking and the development of number sense, are rarely considered in the domain of integers. (Rezat, 2019, S. 73)

Einem Generalisierungsansatz über strukturierte Päckchen folgend schlägt Rezat (2014) Aktivitäten zum Erlernen der Rechenregeln für ganze Zahlen auf der Grundlage des Permanenzprinzips vor. Damit macht er ein typisches Aufgabenformat der Grundschulmathematik anschlussfähig für die Sekundarstufe und setzt damit Aktivitäten im Kontext von Mustern und Strukturen fort, die nicht nur charakteristisch für die Förderung algebraischer Denkweisen im Bereich der Arithmetik der Grundschule sind, sondern sich schon für den Erwerb des Zahlbegriffs im frühkindlichen Bereich als zentral erwiesen haben (Lücken et al., 2014).

Demgegenüber setzen Peled und Carraher (2008) beim Modellieren an und formulieren anwendungsbezogene Aufgaben so um, dass sie generalisierte Lösungen erfordern anstelle von konkreten Zahlenwerten.
Vlassis und Demonty (2022) nähern sich dem algebraischen Denken über das relationale Denken. In einer Studie zum Zusammenhang zwischen

algebraischem Denken und der Leistung beim Rechnen mit negativen Zahlen stellen sie fest, dass die Leistungen beim Rechnen mit negativen Zahlen nicht allein von einer relationalen Denkweise abhängigen, sondern auch bei einer rein auf das Rechnen ausgerichteten Denkweise hoch sein können. Entscheidend scheint den Autorinnen zufolge jedoch eine Auffassung des Minus-Zeichens als einstelliges Rechenzeichen im Kontext einer Grundvorstellung der Subtraktion als Wegnehmen bzw. Verringern zu sein. Selter et al. (2012) hatten in ihrer Analyse die Grundvorstellung der Subtraktion als Wegnehmen eher nachteilig gegenüber der Vorstellung der Subtraktion als Bestimmung des Unterschiedes für algebraische Denkwiesen herausgestellt. Mit ihren Ergebnissen konnten Vlassis und Demonty (2022) zeigen, dass dies nicht zwangsläufig so sein muss und prägen vor diesem Hintergrund den Begriff des „'signed taking-away' meaning of subtraction" (Vlassis & Demonty, 2022, S. 1253).

Fazit

Eine Zusammenschau der Forschungsergebnisse zu den beiden fokussierten curricularen Übergangsthematiken „Zahlbereichserweiterungen" und „algebraisches Denken" zeigt, dass eine solide Entwicklung und Erweiterung des Zahlbegriffs vom frühkindlichen Bildungsbereich bis in die Sekundarstufe verbunden mit einer entsprechenden Sicherung von Basiskompetenzen eine zentrale Voraussetzung für das Erlernen der Algebra ist. Die Grundlagen algebraischen Denkens werden damit mit dem Zählen im frühkindlichen Bereich gelegt. Vielseitige Zählkompetenzen sind das Fundament für die Entwicklung des Zahlbegriffs (Peter-Koop, 2017), ein solide ausgebildeter Zahlbegriff im Bereich der natürlichen Zahlen Voraussetzung für dessen Erweiterung zu den rationalen Zahlen (vgl. z. B. Van Dooren et al., 2015). Ein sicherer und vielseitiger Umgang mit rationalen Zahlen trägt dann mit zum Verstehen der Algebra bei. Dies kann noch einmal durch die Förderung spezifischer algebraischer Denkweisen im Bereich der Arithmetik in den verschiedenen Zahlbereichen gefördert werden. Beide Übergangsthematiken durch geeignete Förderangebote nicht nur zu synchronisieren, sondern enger zu verzahnen verbunden mit der Spezifizierung der erforderlichen Basiskompetenzen bleibt eine weitere wichtige Aufgabe mathematikdidaktischer Entwicklung und Forschung.

Literaturverzeichnis

Barbieri, C. A., Young, L. K., Newton, K. J., & Booth, J. L. (2021). Predicting middle school profiles of algebra performance using fraction knowledge. *Child Development, 92*(5), 1984–2005. https://doi.org/10.1111/cdev.13568

Bastable, V., & Schifter, D. (2008). Classroom stories: Examples of elementary students engaged in early algebra. In J. J. Kaput, D. W. Carraher, & M. L. Blanton (Eds.), *Algebra in the early grades* (S. 165–184). Routledge.

Booth, J. L., & Newton, K. J. (2012). Fractions: Could they really be the gatekeeper's doorman? *Contemporary Educational Psychology, 37*(4), 247–253. https://doi.org/10.1016/j.cedpsych.2012.07.001

Booth, J. L., Newton, K. J., & Twiss-Garrity, L. K. (2014). The impact of fraction magnitude knowledge on algebra performance and learning. *Journal of Experimental Child Psychology,* 118, 110–118. https://doi.org/10.1016/j.jecp.2013.09.001

Carraher, D., & Schliemann, A. D. (2014). Early algebra teaching and learning. In *Encyclopedia of Mathematics Education* (S. 193–196). Springer. https://doi.org/10.1007/978-94-007-4978-8_54

Eriksson, H., & Sumpter, L. (2021). Algebraic and fractional thinking in collective mathematical reasoning. *Educational Studies in Mathematics, 108*(3), 473–491. https://doi.org/10.1007/s10649-021-10044-1

Gueudet, G., Bosch, M., diSessa, A. A., Kwon, O. N., & Verschaffel, L. (2016). *Transitions in mathematics education*. Springer.

Hackenberg, A. J. (2013). The fractional knowledge and algebraic reasoning of students with the first multiplicative concept. *The Journal of Mathematical Behavior,* 32(3), 538–563. https://doi.org/10.1016/j.jmathb.2013.06.007

Hefendehl-Hebeker, L., & Rezat, S. (2023). Algebra: Leitidee Symbol und Formalisierung. In R. Bruder, A. Büchter, H. Gasteiger, B. Schmidt-Thieme, & H.-G. Weigand (Eds.), *Handbuch der Mathematikdidaktik* (S. 123–158). Springer. https://doi.org/10.1007/978-3-662-66604-3_5

Hurst, M., & Cordes, S. (2018). A systematic investigation of the link between rational number processing and algebra ability. *British Journal of Psychology,* 109(1), 99–117. https://doi.org/10.1111/bjop.12244

Jahnke, H. N. (2003). Numeri absurdi infra nihil. Die negativen Zahlen. *mathematik lehren, 2003*(121), 21–22, 39–40.

Kaput, J. J. (2008). What Is algebra? What is algebraic reasoning? In J. J. Kaput, D. W. Carraher, & M. L. Blanton (Eds.), *Algebra in the Early Grades* (S. 5–17). Lawrence Erlbaum Associates.

Liang, J.-H., Heckman, P. E., & Abedi, J. (2018). Prior year's predictors of eighth-grade algebra achievement. *Journal of Advanced Academics, 29*(3), 249–269. https://doi.org/10.1177/1932202X18770172

Linchevski, L., & Herscovics, N. (1996). Crossing the cognitive gap between arithmetic and algebra: Operating on the unknown in the context of equations. *Educational Studies in Mathematics, 30*(1), 39–65. https://doi.org/10.1007/bf00163752

Lüken, M., Peter-Koop, A., & Kollhoff, S. (2014). Influence of early repeating patterning ability on school mathematics learning. In P. Liljedahl, C. Nicol, S. Oesterle, & D. Allan (Eds.), *Proceedings of the 38th Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education and the 36th Conference of the North American Chapter of the Psychology of Mathematics Education. Vol. 4* (S. 137–144). Vancouver, Canada: PME.

Moser Optiz, E. (2009). Erwerb grundlegender Konzepte der Grundschulmathematik als Voraussetzung für das Mathematiklernen in der Sekundarstufe I. In A. Fritz & S. Schmidt (Eds.), *Fördernder Mathematikunterricht in der Sek. I. Rechenschwierigkeiten erkennen und überwinden* (S. 29–43). Beltz.

Pearn, C., Stephens, M., & Pierce, R. (2022). Algebraic reasoning in years 5 and 6: Classifying its emergence and progression using reverse fraction tasks. *ZDM – Mathematics Education, 54*(6), 1257–1271. https://doi.org/10.1007/s11858-022-01426-7

Peck, F., & Matassa, M. (2016). Reinventing fractions and division as they are used in algebra: The power of preformal productions. *Educational Studies in Mathematics, 92*(2), 245–278. https://doi.org/10.1007/s10649-016-9690-y

Peled, I., & Carraher, D. (2008). Signed numbers and algebraic thinking. In J. J. Kaput, D. W. Carraher, & M. L. Blanton (Eds.), *Algebra in the Early Grades* (S. 303–328). Lawrence Erlbaum Associates.

Peter-Koop, A. (2017). Prävention von Rechenschwierigkeiten. Vorläuferfähigkeiten als unverzichtbare Voraussetzung. *Mathematik differenziert, 7*(2), 6–9.

Peter-Koop, A., Hasemann, K., & Klep, J. (2006). *SINUS-Transfer Grundschule Mathematik. Modul G10: Übergänge gestalten.* Kiel: IPN.

Peter-Koop, A., & Specht, B. (2011). Problemfall Bruchrechnung. Diagnostisches Interview als Fördergrundlage. *mathematik lehren,* 166, 15–19.

Radford, L. (2010). Signs, gestures, meanings: Algebraic thinking from a cultural semiotic perspective. In V. Durand-Guerrier, S. Soury-Lavergne, & F. Arzarello (Eds.), *Proceedings of the Sixth Congress of the European Society for Research in Mathematics Education. January 28th - February 1st 2009, Lyon (France)* (S. XXXIII–LIII). INRP.

Rezat, S. (2014). Das Permanenzprinzip erfahren: An der 1+1-Tafel und der 1×1-Tafel das Rechnen mit negativen Zahlen operativ erkunden. *mathematik lehren,* 183, 11–14.

Rezat, S. (2019). Extensions of number systems: Continuities and discontinuities revisited. In U. Janqvist, M. van den Heuvel-Panhuizen, & M. Veldhuis (Eds.), *Proceedings of the Eleventh Congress of the European Society for Research in Mathematics Education (CERME11, February 6 – 10, 2019)* (S. 56–80). Freudenthal Group & Freudenthal Institute, Utrecht University and ERME.

Selter, C., Prediger, S., Nührenbörger, M., & Hußmann, S. (2012). Taking away and determining the difference: A longitudinal perspective on two models of subtraction and the inverse relation to addition. *Educational Studies in Mathematics, 79*(3), 389–408. https://doi.org/10.1007/s10649-011-9305-6

Sfard, A. (1995). The development of algebra: Confronting historical and psychological perspectives. *The Journal of Mathematical Behavior, 14*(1), 15–39. https://doi.org/10.1016/0732-3123(95)90022-5

Van Dooren, W., Lehtinen, E., & Verschaffel, L. (2015). Unraveling the gap between natural and rational numbers. *Learning and Instruction, 37*, 1–4. https://doi.org/10.1016/j.learninstruc.2015.01.001

Viegut, A. A., Stephens, A. C., & Matthews, P. G. (2024). Unpacking the connections between fractions and algebra: The importance of fraction schemes and units coordination. *Investigations in Mathematics Learning, 16*(3), 180–202. https://doi.org/10.1080/19477503.2024.2307805

Vlassis, J., & Demonty, I. (2022). The role of algebraic thinking in dealing with negative numbers. ZDM – *Mathematics Education, 54*(6), 1243–1255. https://doi.org/10.1007/s11858-022-01402-1

Winter, H. (1982). Das Gleichheitszeichen im Mathematikunterricht der Primarstufe. *mathematica didactica, 5,* 185–211.

Teil II

Empirische Befunde zu mathematischen Basiskompetenzen

Ein mehrperspektivischer Blick auf die Förderung arithmetischer Basiskompetenzen im Elementarbereich

Christiane Benz, Dagmar Bönig, Hedwig Gasteiger & Kerstin Gerlach

Abstract

In diesem Beitrag wird die Förderung arithmetischer Basiskompetenzen aus drei einander ergänzenden Perspektiven beleuchtet: aus der Perspektive der Familie, der Perspektive der Aus- und Fortbildung pädagogischer Fachkräfte sowie aus der Perspektive fachbezogener Sprache. In der Zusammenschau wird deutlich, dass die Förderung arithmetischer Basiskompetenzen auf ganz unterschiedlichen Ebenen der gezielten Vernetzung bedarf.

Pädagogische Fachkräfte, Familie, Ausbildung, Fortbildung, Sprache

Einleitung

Arithmetische Basiskompetenzen und deren Erwerb schon vor Schulbeginn rückten in diesem Jahrtausend nicht allein aufgrund der Ergebnisse internationaler Vergleichsstudien in den bildungspolitischen Fokus. Forschungsergebnisse – national und international – bestätigen seit vielen Jahren, dass grundlegende Fähigkeiten und Fertigkeiten bereits im Elementarbereich für die spätere mathematische Lern- und Bildungsbiografie erworben werden – oder eben auch nicht (Anders et al. 2013; Rittle-Johnson, Fyfe, Hofer, Farran 2017; Skopek & Passaretta 2020). Insbesondere sind es grundlegende arithmetische Kompetenzen, wie Mengenerfassung, Zählfähigkeiten, Zahlvergleiche, oder einfache Additionen und Subtraktionen, die sich als relevant für das weitere Mathematiklernen erwiesen (Geary 2011; Nguyen et al., 2016; Fyfe et al.,2019, Rittle-Johnson et al., 2017). Allerdings zeigen sich bereits im Elementarbereich soziale und migrationsbedingte Unterschiede in der mathematischen Entwicklung, die zumeist auf sprachliche Aspekte sowie auf sozioökonomische Benachteiligungen zurückgeführt werden (Nguyen et al., 2016; Schuchardt et al., 2014; Skopek & Passaretta, 2020).

Die Frage, wie die Förderung arithmetischer Basiskompetenzen im Elementarbereich in der Breite gelingen kann, ist für Bildungspolitik, mathematikdidaktische Forschung und pädagogische Praxis gleichermaßen herausfordernd. In diesem Beitrag werden aus dem Kontext mathematikdidaktischer Forschung drei Perspektiven zusammengestellt, die die benannten Schwerpunkte bisheriger Forschungsergebnisse aufgreifen.

Es geht um 1) den Lernort Familie und den Ausgleich sozio-ökonomischer Benachteiligungen, 2) die Aus- und Fortbildung von Fachkräften für eine gelingende mathematische Förderung in Kindertageseinrichtungen und 3) die verbindende Rolle der Sprache. An der Zusammenschau der drei Perspektiven wird exemplarisch deutlich, dass die Förderung arithmetischer Basiskompetenzen ein Anspruch ist, der im Kontext der frühen Entwicklung des Kindes sowohl institutionell als auch inhaltlich ganzheitlich zu betrachten ist.

Perspektive: Familie

Wichtigste Bildungsorte in Bezug auf die frühe kindliche Bildungsbiografie sind das familiäre Umfeld (im englischsprachigen Bereich als ‚home learning environment' (HLE) bezeichnet) sowie die Kita. Da die Einflüsse pädagogischer Qualität in der Familie auf die kindliche Entwicklung insgesamt als größer gelten als jene in der Kita (Skopek & Passaretta, 2020; Sydzlik, 2007; Stamm, 2013; Tietze et al., 2005), werden in diesem Abschnitt zunächst Forschungsergebnisse zur familiären Förderung mathematischer Kompetenzen im Allgemeinen und zur familiären Förderung arithmetischer Basiskompetenzen im Besonderen erörtert.

Nach Schuchardt et al. (2014) kristallisieren sich das Bildungsniveau der Eltern und die Häufigkeit mathematikbezogener Erfahrungen im häuslichen Alltag als entscheidende Einflussfaktoren heraus. Letztere – so wird vermutet – sind womöglich in Familien mit niedrigem sozioökonomischem Status deutlich geringer, was erklären könnte, dass Kinder aus sozial benachteiligten Familien bereits im Kindergartenalter über geringere mathematische Fähigkeiten verfügen (Bonifacci et al., 2021; Jordan et al., 2006). Armut in Familien stellt generell einen zentralen Prädiktor für Entwicklungsrisiken von Kindern dar. Insbesondere konnte ein signifikanter Zusammenhang zwischen Leistungen im mathematischen Bereich und dem sozioökonomischen Status der Eltern nachgewiesen werden (Weiß, 2010, Jordan & Levine, 2009 und Skopek & Passsaretta, 2020).

Während Eltern (und auch Fachkräften) die Bedeutung familialer Aktivitäten für die sprachliche Entwicklung ihrer Kinder oft bewusst ist, gilt dies bezogen auf die mathematische Entwicklung in deutlich geringerem Ausmaß (Benz, 2012). Möglicherweise fehlt hier ausreichendes Wissen über sinnvolle Unterstützungsaktivitäten (Elliott & Bachmann, 2018; Kluczniok, 2017). Die Forschungen über den Einfluss der *Home Numeracy Environment* auf die mathematischen Fähigkeiten von Kindern verweisen ebenso auf einen Zusammenhang mit der Qualität der familiären Anregungsbedingungen (Anders et al., 2012; Dowker, 2021; Kluczniok et al., 2011; Niklas & Schneider, 2012; Schuchardt et al., 2014; Söchtig & Niklas, 2020).
Zur Förderung arithmetischer Basiskompetenzen in der Kita eignen sich

u. a. mathematikbezogene Spiele und Bilderbücher (Benz et al., 2015, Gasteiger 2013, Tiedemann, 2012). Damit lassen sich sach- und entwicklungsangemessene, selbstdifferenzierende und ko-konstruktive Lerngelegenheiten herstellen. Bezogen auf den Einsatz in Familien sind mathematikbezogene Spiele besonders geeignet, da eine Fokussierung auf mathematische Aspekte durch das Spiel und seine Regeln vorgegeben ist. Zugleich vermittelt das Spielen Kindern Erfolgserlebnisse bei zunächst niedrigschwelligen sprachlichen Anforderungen. Darüber hinaus hat das Spielen zahlen- und mengenbezogener Gesellschaftsspiele nachweislich einen positiven Fördereffekt auf die mathematischen Kompetenzen von Vorschulkindern (z. B. Gasteiger & Moeller, 2021; Siegler & Ramani, 2009). Die spielorientierte Förderung empfiehlt sich auch für Kinder mit weniger gut entwickelten numerischen Kompetenzen (Jörns et al., 2014). Daher ist es wenig verwunderlich, dass gerade Spiele oftmals in familienbezogenen Förderprojekten eingesetzt werden (Bönig & Thöne, 2017, Niklas & Schneider, 2012; Niklas et al., 2016; Schuchardt et al., 2014, Streit-Lehmann, 2022).

Bei der Auswahl der Spiele sollte beachtet werden, dass Zählaktivitäten, wie sie in vielen Würfelspielen vorkommen, ergänzt werden durch Aktivitäten zur Strukturwahrnehmung und -deutung in Mengendarstellungen (vgl. Abschn. „Perspektive: Aus- und Fortbildung“). Letzteres lässt sich auch durch die Auswahl geeigneter mathematikbezogener Bilderbücher adressieren. Zugleich spricht die in den Bilderbüchern erzählte Geschichte Kinder oftmals stärker emotional an. Ein an den Prinzipien dialogischen Vorlesens (Whitehurst et al., 1988) orientiertes Betrachten der Bücher regt zugleich die Kommunikation über mathematische Aspekte der Geschichte an (vgl. Abschn. „Perspektive: Sprache“), darüber hinaus können zusätzlich mathematikbezogene Handlungsaktivitäten stattfinden. Positive Auswirkungen auf die mathematische Lernentwicklung von Kindern durch den Einsatz solcher Bilderbücher sind ebenfalls empirisch belegt (Hong, 1996; Jennings et al., 1992; Young-Loveridge, 2004). Neben dem Anstieg des mathematischen Interesses wirkt sich die Fokussierung auf mathematische Aspekte in Geschichten positiv auf die numerischen Fähigkeiten der Kinder aus.

Die Ausleihe mathematikbezogener Spiele und Bilderbücher in der Kita ist zentrales Charakteristikum zweier Projekte (Bönig & Thöne, 2017; Streit-Lehmann, 2022), die die institutionelle Förderung mit der Förderung in Familien verknüpfen. Während Streit-Lehmann (2022) auf die Ausleihe von Materialien mit hohem Aufforderungscharakter fokussierte, fand bei Bönig & Thöne (2017) zusätzlich ein wöchentlicher, von Studierenden geleiteter Stuhlkreis in der Kita statt. Dieser bot einerseits Austausch über die ausgeliehenen Materialien, andererseits wurden z. B. noch unbekannte Spiele erprobt und Bilderbücher vertiefter thematisiert. So konnten beispielsweise verschiedene Strategien zur Mengenwahrnehmung und Anzahlbestimmung (vgl. Abschn. „Perspektive: Aus- und Fortbildung“) oder die für das mathematische Lernen hilfreiche Kommentierung von Spielzügen (Gasteiger & Benz, 2020) gezielt angesprochen werden. Darüber hinaus wurden Eltern-Informationsnachmittage und Zusatzmaterialien zu Bilderbüchern (z. B. in Form von Hörspielen) angeboten.

Die Ergebnisse beider Projekte indizieren, dass auf diese Weise sowohl das mathematische Interesse wie auch die arithmetischen Kompetenzen von Kindern aus bildungsbenachteiligten Familien gestärkt werden können. Die verschränkte Arbeit in der Kita und Familie bietet prinzipiell ein vergleichsweise niedrigschwelliges Angebot, welches allerdings vor dem Hintergrund des akuten Mangels an pädagogischen Fachkräften im Elementarbereich nicht leicht umsetzbar ist.

Perspektive: Aus- und Fortbildung

Um mathematische Basiskompetenzen – jenseits des Familienalltags – professionell fördern zu können, müssen pädagogische Fachkräfte bestmöglich unterstützt werden. Frühe mathematische Bildung ist bislang oftmals nicht Teil der Ausbildung. Deshalb besteht für die pädagogische Praxis Bedarf an einer mathematikdidaktisch fundierten Aus- und Fortbildung.

In Theorie und Praxis ist es unstrittig, dass Zählen eine wichtige arithmetische Kompetenz im arithmetischen Lernprozess und somit auch im Elementarbereich darstellt. Werden Fachkräfte nach zu erwerbenden arithmetischen Kompetenzen befragt, stellt Zählen (sowohl rein verbales Zählen als auch Objekte zählen) die am häufigsten genannte Kompetenz dar (Benz, 2013). Forschungen zum Zahlbegriffserwerb und zum Rechnenlernen unterstreichen durchaus die Bedeutung der Zählkompetenzen (Gelman & Gallistel, 1986; Fuson, 1992; Baroody, Mix, Kartal & Lai, 2023; Schneider, Küspert & Krajewski, 2021; Karahisarlioglu & Fritz, 2024). Allerdings ist hinreichend erforscht und auch in allen Entwicklungsmodellen bzw. learning trajectories verankert, dass Zählkompetenzen und -strategien allein nicht tragfähig sind, sondern neben einem ersten Operationsverständnis u. a. auch nicht-zählende Anzahlbestimmungsstrategien wie Simultanerfassung und Quasi-Simultanerfassung weitere wichtige Basiskompetenzen darstellen (Flottmann, Streit-Lehmann & Peter Koop, 2021). Bei der Quasi-Simultanerfassung werden in größere Anzahlen Strukturen hineingedeutet. Die Anzahl wird so in kleinere Mengen zerlegt bzw. einzelne Objekte werden zu neuen Einheiten zusammengesetzt. Die kleinen Einheiten können simultan erfasst werden und dann kann die Anzahl aller kleinen Einheiten bestimmt werden. Beim Quasi-Simultanerfassen kommt das Teil-Ganzes-Verständnis zum Tragen, welches schon seit den 1980er Jahren als ein wichtiger Meilenstein des Zahl- und Operationsverständnisses bezeichnet wird: „Probably the major conceptual achievement of the early school years is the interpretation of numbers in terms of part and whole relationships“ (Resnick, 1989, S. 114).

Stehen verschiedene Strategien zur Mengenwahrnehmung und Anzahlbestimmung anhand von Strukturen in Mengendarstellungen im Zentrum, kommt die prozessorientierte Sichtweise auf Mathematik zum Tragen. Dies geschieht immer dann, wenn Fragen und Handlungen von Lernbegleitenden den Blick nicht mehr allein auf das Ergebnis lenken, sondern vor allem auf das Vorgehen der Kinder – also auf die Prozesse. Statt lediglich zu fragen „Wie viele sind es?“ interessiert dann „Warum sind es sieben?“ oder „Woher hast du gewusst, dass es sieben sind?“ Gerade Impulse und Fragen wie diese sind entscheidend dafür, dass aus reinen Zählaufgaben gewinnbringende und auch weiterführende Lerngelegenheiten werden, in denen die Kinder verstehensorientiert Basiskompetenzen auch jenseits des Zählens erwerben können.

Eine anregende mathematikbezogene Interaktion in Alltagssituationen zu gestalten, erfordert jedoch ein hohes Maß an Kompetenz von den Lernbegleitenden. Zunächst benötigen die Lernbegleitenden explizites theoretisches Wissen, um situationsangemessen individuelle Strukturdeutungen und Anzahlbestimmungsprozesse von Kindern nachvollziehen zu können. Auf dieser Basis kann es gelingen, diese Strukturdeutungen und Anzahlbestimmungsprozesse mit prozessbezogenen Impulsen zur Förderung unterschiedlicher arithmetischer Basiskompetenzen aufzugreifen und weiterzuentwickeln (Gasteiger & Benz, 2016, S. 283).

In Aus- und Weiterbildung ist es deshalb wichtig, dafür Sorge zu tragen, dass neben zählenden Anzahlbestimmungen auch nicht-zählende Anzahlbestimmungen thematisiert werden, anhand derer die (angehenden) Fachkräfte explizites Wissen über Teil-Ganzes und Quasi-Simultanerfassung und Verständnis für deren Bedeutung erwerben können.

Wissen allein reicht jedoch nicht aus. Es ist eine weitere Herausforderung für Aus- und Fortbildung, (angehende) Fachkräfte so fachlich zu sensibilisieren, dass sie in entsprechenden (Alltags-)Situationen Lerngelegenheiten für Quasi-Simultanerfassung oder das Teil-Ganze-Verständnis wahrnehmen können. Erst dann kann es gelingen, Impulse zum Erwerb dieser Basiskompetenzen zu geben (Gasteiger & Benz, 2016).

In einer explorativen Studie zur Beobachtungsgenauigkeit (Monville, 2024, unveröffentlicht) wurde deutlich, dass Fachkräfte große Schwierigkeiten haben, zwischen nicht-zählenden und zählenden Prozessen zu unterscheiden bzw. nicht-zählende Prozesse als solche wahrzunehmen. 20 Teilnehmenden wurden zunächst innerhalb eines Workshops nicht-zählende Prozesse sowie deren Voraussetzungen und Bedeutung anhand von Videovignetten vorgestellt. Darüber hinaus wurde ein Beobachtungsbogen für ein Regelspiel vorgestellt, auf dem Impulse angegeben waren, die das Zählen sowie nicht-zählende Prozesse anregen, und passgenaue mögliche zu beobachtende zählende und nicht-zählende Vorgehensweisen der Kinder. Das Spiel wurde mit einer Lernbegleiterin und einem Kind durchgeführt. Die Fachkräfte nahmen einzeln die Beobachtungsrolle ein und füllten während des Regelspiels den Beobachtungsbogen aus. Die Spiel-Situationen wurden videografiert und anschließend von einer weiteren Person dahingehend analysiert, ob die Kinder zählende oder nichtzählende Kompetenzen zeigten. Trotz einer 1,5-stündigen Einführung waren sehr wenige Fachkräfte in der Lage, die nicht-zählenden Prozesse als solche zu erkennen und auf dem Beobachtungsbogen zu dokumentieren. Selbst wenn das Kind sofort erkannte, dass sechs Eier in der Schachtel waren, dokumentierten viele Fachkräfte, dass das Kind zählen kann, und nicht, dass es die Menge auf einen Blick erfassen kann.

Aus diesem Grund wurden anschließende Leitfrageninterviews mit vier Fachkräften durchgeführt. Die Fachkräfte, die nicht-zählende Prozesse nicht als diese dokumentierten, zeigten in den Interviews eine klare Fokussierung auf das Zählen als zu erwerbende mathematische Basiskompetenz und benannten diese eindeutig als wichtigste und teilweise sogar als einzig wichtige Kompetenz. Einige Fachkräfte äußerten geradezu Unverständnis für die Bedeutung nicht-zählender Prozesse:

> „Aber dann auch zu sehen, dass es auch noch andere Wege gibt, finde ich jetzt schon ganz interessant. Wobei ich schon auch den Schwerpunkt trotzdem irgendwie auf das Zählen setzen würde und jetzt nicht so ganz verstehe, warum die Kinder das mit den Teilmengen machen sollen, also warum die dann nicht zählen sollen und in manchen Situationen eben das auch anders machen sollen oder das so im Vordergrund steht."

Die Fachkraft hat verstanden, dass es auch andere Wege der Anzahlbestimmung gibt, die wichtige Bedeutung für das schulische Lernen ist ihr aber trotz des vorgeschalteten Workshops nicht bewusst geworden. Welche Konsequenzen müssen für die Aus- und Fortbildung daraus gezogen werden?

Bezüglich der Gestaltung von Aus- und Weiterbildungsangeboten kann geschlossen werden, dass eine kurze Fortbildungseinheit offensichtlich nicht ausreicht, damit (angehende) Fachkräfte das erforderliche explizite Wissen über nicht-zählende Prozesse sowie die für das nicht-zählende Anzahlerfassen notwendigen Voraussetzungen verinnerlichen. Vor allem die Bedeutung dieser Prozesse scheint nicht umfänglich deutlich geworden zu sein. Eine angemessene Fortbildungsdauer (Lipowsky & Rzejak, 2021), aber auch eine angemessene Anzahl an Lerngelegenheiten in der Ausbildung (Strahl & Bruns, i.V.) ist entscheidend für den Kompetenzerwerb.
Darüber hinaus muss Aus- und Fortbildung die Basiskompetenzen mehrfach unter verschiedenen Blickwinkeln thematisieren, damit die (angehenden) Fachkräfte nicht nur explizites Wissen erwerben, sondern auch

lernen, verschiedene Prozesse wahrzunehmen. Konkret heißt das, dass es Lerngelegenheiten für den Erwerb expliziten Wissens gibt, aber auch Lerngelegenheiten, in denen Kinder beobachtet werden und die Beobachtungen gemeinsam reflektiert werden – das explizite Wissen kommt also in konkreten Situationen zum Einsatz und wird reflektiert (Gasteiger & Benz, 2018). Es ist davon auszugehen, dass diese Anwendung in gewisser Weise auch trainiert werden muss, damit jenseits des Zählens Anzahlerfassungsprozesse bei den Kindern auch erkannt werden, wenn diese im Alltag spontan auftauchen. Die ganze Breite der Basiskompetenzen (inklusive Anzahlerfassung und Teil-Ganzes-Verständnis) kann dann erneut aufgegriffen werden, wenn basierend auf den Beobachtungsergebnissen darüber nachgedacht wird, Kinder passgenau zu unterstützen und zum Weiterlernen anzuregen. Aus- und Weiterbildung muss also dafür Sorge tragen, dass Wissen über Basiskompetenzen verinnerlicht werden kann, indem auch die situative Beobachtung und Wahrnehmung dieser Basiskompetenzen geschult und angemessene pädagogisch-didaktische Handlungsmöglichkeiten, die nicht-zählende Anzahlerfassungsprozesse und deren Verbalisierung anregen, fokussieren (Gasteiger & Benz, 2016). Entscheidend ist dabei, dass das Gelernte immer wieder fachgebunden reflektiert wird.

Exemplarisch werden zwei Möglichkeiten aufgezeigt, wie Aus- und Fortbildung nach den beiden Grundforderungen der Nachhaltigkeit und der inhaltsgebundenen Vernetzung professioneller Kompetenzen gestaltet werden kann, um ein breites Verständnis für Basiskompetenzen zu sichern.

Beispiel 1: MiniMa an der PH Karlsruhe

An der Pädagogischen Hochschule in Karlsruhe besteht seit 2010 ein Forschungs- und Entwicklungsprojekt, das kindheitspädagogischen Fachkräften und Grundschullehrkräften anhand von Workshops, Werkstattbesuchen und Reflexionstreffen eine dreiphasige Fortbildung auch zu verschiedenen Inhalten der frühen mathematischen Bildung, insbesondere immer wieder zu arithmetischen Basiskompetenzen bietet. Durch die Dreiphasigkeit wird Nachhaltigkeit gewährleistet. Die zugehörige MachmitWerkstatt MiniMa wird jedes Jahr von mehr als 70 Kindergruppen und ihren Lernbegleitungen besucht. Sie dient Studierenden der Kindheitspädagogik und des Grundschullehramts als Lehr-Lern-Labor, in dem sie mathematische Spiel- und Erkundungsumgebungen für Kinder planen und erproben sowie anhand von Videoaufnahmen intensiv reflektieren. Die professionellen Kompetenzen werden also vernetzt in der Anwendung gefördert. Vor allem beim Beobachten und gemeinsamen Reflektieren zeigt sich, dass hier ein Blickwechsel von einer einseitigen Fokussierung auf zählende Anzahlbestimmungen hin zu weiteren nicht-zählenden Prozessen erfolgt, bei denen vor allem auch hineingedeutete Strukturen in Anzahldarstellungen eine tragende Rolle spielen.

Beispiel 2: ***EmMa-Erzieherinnen und Erzieher machen Mathematik am DZLM***

In der Fortbildungsmaßnahme *EmMa - Erzieherinnen und Erzieher machen Mathematik* (Bruns & Eichen, 2018) des Deutschen Zentrums für Lehrkräftebildung Mathematik (DZLM) werden frühpädagogische Fachkräfte in sechs Modulen, die jeweils einen ganzen Tag dauern, zu allen mathematischen Inhaltsbereichen fortgebildet. Alle Module beinhalten Phasen, in denen das explizite Wissen der Fachkräfte adressiert wird, und eher praktische Phasen, in denen die Beobachtung fachspezifischer Kompetenzen sowie die Anregung dieser in Alltags- und geplanten Situationen erfolgt. Zwischen den Fortbildungsmodulen arbeiten die Fachkräfte in ihren Einrichtungen und setzen das um, was im vorangegangenen Modul thematisiert wurde. Aufgrund der Dauer des gesamten Programms sind zahlreiche Reflexionsmöglichkeiten gegeben, die für eine nachhaltige Wirksamkeit ebenso wichtig sind wie für die Vernetzung der verschiedenen Kompetenzfacetten. Letzteres ist ein wichtiges Gestaltungsprinzip der Fortbildungsmaßnahme. Das Fortbildungsprogramm erwies sich als wirksam in Bezug auf den Wissenserwerb und eine Veränderung zu den Einstellungen zur Mathematik (Bruns et al., 2017). Selbst wenn das Fortbildungsprogramm nicht direkt durch die Expertinnen und Experten, die die Maßnahme entwickelt haben, sondern durch speziell qualifizierte Multiplikatorinnen und Multiplikatoren durchgeführt wurde, war Wirksamkeit gegeben, was für die Wichtigkeit der zentralen Prinzipien angemessene Fortbildungsdauer und Vernetzung von Kompetenzfacetten spricht (Bruns, Hagena & Gasteiger, 2023). Nach ähnlichem Prinzip erfolgt derzeit die bundesweite Qualifizierung von Fachschullehrkräften im Programm QuaMath des DZLM (https://quamath.de/fmb/fortbildung-fuer-lehrkraefte), so dass auch in der Ausbildung wichtige Grundlagen für den Erwerb von Basiskompetenzen vor und zum Schuleintritt gelegt werden.

Beide Maßnahmen charakterisieren sich dadurch, dass – neben einer angemessenen Fortbildungsdauer – Basiskompetenzen kennengelernt, aber das Wissen darüber auch in der Beobachtung und Handlung angewandt wird, und dass sie einen hohen Grad an Reflexion einfordern. Gerade bei (angehenden) Fachkräften, deren mathematischer Hintergrund doch sehr unterschiedlich ist, scheint es wichtig zu sein, das explizite Wissen auch intensiv mit Handlungsfacetten zu verknüpfen, um die Bedeutung der Wissensbausteine auch nachhaltig verinnerlichen zu können.

Perspektive: Sprache

Quer zu der Frage nach Unterstützung frühen mathematischen Lernens in Familie und Kita ist aufseiten der Kinder ein wichtiger Einflussfaktor auf die mathematische Entwicklung ihre sprachliche Kompetenz (Bochnik, 2017; Paetsch et al., 2016; Wendt et al., 2021). So werden auch migrationsbedingte Leistungsunterschiede, die sich in der mathematischen Entwicklung bereits vor Schulbeginn manifestieren, u. a. auf sprachliche Unterschiede zurückgeführt (Heinze et al., 2007; Wendt et al., 2021; vgl. Abschn. „Perspektive: Familie“). Bezogen auf den Mathematikunterricht in Grund- und weiterführender Schule konnte dazu präzisierend herausgearbeitet werden, dass es weniger der Migrationshintergrund ist, der die schwächeren Mathematikleistungen erklärt, sondern vielmehr die Beherrschung der Unterrichtssprache (Paetsch et al., 2016, 2015; Prediger et al., 2015). Für den Elementarbereich können diese Studien als Hinweis darauf gelesen werden, dass die frühe mathematische Entwicklung auch davon abhängt, wie gut das lernende Kind die Sprache(n) beherrscht, mit denen in Familie und Kita die Förderung mathematischer Basiskompetenzen gestaltet wird. Für die pädagogische Praxis in Kita (und Schule) wird damit der Blick für die tatsächliche sprachliche Entwicklung der Kinder geschärft: Es gibt Kinder mit Migrationshintergrund, deren Beherrschung des Deutschen altersangemessen (oder besser) entwickelt ist und die daher keinerlei sprachbedingte Nachteile in ihrer mathematischen Entwicklung aufweisen; es gibt aber auch Kinder ohne Migrationshintergrund, die monolingual deutsch aufwachsen, das Deutsche aber *trotzdem* nicht so gut beherrschen, dass sie es z. B. für die abstrahierenden Zusammenhänge früher Arithmetik angemessen nutzen können.

Derartige Forschungsergebnisse zum Zusammenhang von Sprachkompetenz und Mathematikleistung weisen bereits daraufhin, dass es auch die Eigenheit des mathematischen Inhalts ist, der den Einfluss der Sprache bestimmt (Bochnik, 2017; Heinze et al., 2007). Diese Annahme konnte in empirischen Studien in zweierlei Hinsicht bestätigt werden. Erstens hat die Beherrschung der mathematischen Fachsprache (dazu Tiedemann, 2015) größeren Einfluss auf die Mathematikleistung als allgemeinsprachliche Kompetenzen (z. B. Bochnik, 2017; Bochnik & Ufer, 2016). Zweitens ist der Einfluss der Sprache in unterschiedlichen mathematischen Kompetenzbereichen unterschiedlich stark ausgeprägt; insbesondere der Aufbau mentaler Repräsentationen erfolgt im Unterricht sprachlich vermittelt und zeigt daher einen besonders starken Zusammenhang zur Beherrschung der (fachbezogenen) Sprache (z. B. Heinze et al., 2007)

Für eine verständnisorientierte Förderung arithmetischer Basiskompetenzen gilt es daher, insbesondere die so wichtigen anspruchsvolleren Kompetenzen wie das strukturierende Deuten von Mengendarstellungen, das

Erfassen von Teil-Ganzes-Beziehungen oder die quasi-simultane Anzahlerfassung (vgl. Abschn. „Perspektive: Aus- und Fortbildung") auch in ihren sprachlichen Anforderungen als Förderziele in den Blick zu nehmen. Wenn nicht-zählende Formen der Anzahlbestimmung gefördert werden sollen, braucht es mehr als Zahlworte und den zunehmend funktionalen Gebrauch der Zahlwortreihe (Benz & Tiedemann, 2021). Wer Mengen strukturierend deuten soll, hat zunächst mal eine Menge vor sich, also z. B. eine Anzahl an Wendeplättchen oder die Abbildung eines Eierkartons. Nun sind die Strukturen, die für nicht-zählende Formen der Anzahlbestimmung wesentlich sind, in diesen Darstellungen nicht einfach gegeben und für jedermann sichtbar, sondern müssen in die Menge hineingedeutet werden (s. o.; Lorenz, 1998; Söbbeke, 2005). Deutungen werden an Darstellungen immer nur herangetragen, niemals von ihnen bestimmt. Kinder müssen diesen strukturierenden Blick auf Mengen also erst lernen und brauchen dafür in Familie und Kita kompetente Andere, die mit ihnen über strukturierende Deutungen und darauf basierende Anzahlbestimmungsprozesse sprechen.

Dabei stehen inhaltlich und sprachlich mathematische Beziehungen im Fokus (Tiedemann & Benz, 2022):

- geometrische Beziehungen: „Da sind sechs Punkte und daneben noch ein einzelner."
- arithmetische Beziehungen: „Das sind zwei und zwei, macht zusammen vier."

Sowohl geometrische als auch arithmetische Beziehungen können statisch sein, also z. B. in eine feste Plättchenanordnung hineingedeutet werden, oder aber dynamisch, also z. B. als ein ablaufender Prozess des Veränderns durchgeführt oder vorgestellt werden (Padberg & Benz, 2021; Schulz & Wartha, 2021). Was alle mathematischen Beziehungen gemeinsam haben, ist, dass ihre sprachliche Darstellung anspruchsvoll ist (Prediger et al., 2015; Redder, 2013; Tiedemann, 2020). Denn sie erfordern sprachliche Mittel, die etwas bezeichnen, das wir nicht sehen können. Beziehungen sind nicht sichtbar oder hörbar, wir können sie nicht anfassen und auch nicht auf sie zeigen (Lorenz, 1998; Söbbeke, 2005). Wir können nur konventionalisierte Darstellungen nutzen, um auf sie zu verweisen: „daneben" oder „zusammen". Der Erwerb einer solchen ‚Beziehungssprache' ist herausfordernd und bedarf der aufmerksamen Begleitung (Redder, 2013). Er ist für die mathematische Entwicklung von Kindern aber unverzichtbar (Prediger, 2013). Für die Förderung arithmetischer Basiskompetenzen in Familie und Kita ergibt sich daraus, dass all jene Personen, die Kinder in ihrer mathematischen Entwicklung begleiten, zunächst selbst Worte für mathematische Beziehungen finden und diese dann im Dialog mit den Kindern möglichst häufig und klar verwenden sollten (Tiedemann & Benz, 2022). Auf diese Weise erhalten

Kinder ausreichend Gelegenheit, geeignete mathematikbezogene Sprache zunächst intensiv zu hören und sie dann zunehmend selbst zu erproben.

Dieser wünschenswerte umfangreiche Gebrauch von mathematikbezogener ‚Beziehungssprache' ist im familialen und pädagogischen Alltag häufig auf andere Darstellungen, wie z. B. auf alltägliche oder didaktische Gegenstände, aber auch auf Bilder bezogen (zur Vernetzung von Darstellungen: Prediger & Wessel, 2012; Wessel, 2014). Diese konkreteren, weil anschaulicheren Darstellungen sind für die Sprache in der frühen mathematischen Entwicklung immer beides zugleich: Entlastung und Herausforderung (Tiedemann & Fetzer, 2018). Erklärt ein Kind an einer Menge vor ihm liegender Kastanien seine strukturierende Deutung, kann es mit sehr knappen sprachlichen Mitteln auskommen, wenn es gleichzeitig an den konkreten Objekten gestisch zeigen kann, wie es die Menge gedanklich strukturiert hat: „Hier zwei. Hier drei. Einfach." Möchte das Gegenüber im Gespräch nun herausfinden, ob das Kind auch die Gesamtanzahl bestimmen oder die Menge gedanklich auch anders strukturieren kann, wird das gestisch Gezeigte zur sprachlichen Herausforderung. Es bedarf dann nämlich weiterer Ausführungen, die stärker mathematische Beziehungen und mathematische Prozesse fokussieren und daher in besonderer Weise auf den Gebrauch der Sprache angewiesen sind (Tiedemann & Benz, 2022). Denn der größte Vorteil der Darstellung Sprache besteht darin, dass sie den abstrahierenden Zugriff auf arithmetische Beziehungen wunderbar präzise darstellen kann: „Klar, fünf. Die zwei hier, die drei hier. Sind zusammen fünf. Ist ja immer so."

Fazit

Die drei ausgewählten Perspektiven der Familie, der Aus- und Fortbildung sowie der Sprache zeigen in ihrer Zusammenstellung exemplarisch, dass die Förderung arithmetischer Basiskompetenzen in (mindestens) dreifacher Weise der Vernetzung bedarf: Es erscheint bedeutsam,

1. dass die verantwortlichen Personen in Kita und Familie zusammenarbeiten (vgl. Abschn. „Perspektive: Familie"),
2. dass in der Arbeit mit (angehenden) pädagogischen Fachkräften die Vermittlung von explizitem Wissen über arithmetische Basiskompetenzen mit Übungen in Beobachtung und konkretem pädagogischem Handeln verbunden wird (vgl. Abschn. „Perspektive: Aus- und Fortbildung") und
3. dass die Förderung arithmetischer Basiskompetenzen immer *auch* als eine (fach-)sprachliche Herausforderung zu verstehen und zu bearbeiten ist (vgl. Abschn. „Perspektive: Sprache").

Literaturverzeichnis

Anders, Y., Grosse, C., Rossbach, H.-G., Ebert, S., & Weinert, S. (2013). Preschool and primary school influences on the development of children's early numeracy skills between the ages of 3 and 7 years in Germany. *School Effectiveness and School Improvement,* 24(2), 195–211. https://doi.org/10.1080/09243453.2012.749794

Baroody, A. J., Mix, K. S., Kartal, G., & Lai, M. (2023). The development and assessment of early cardinal-number concepts. *Journal of Numerical Cognition*, 9(1), 182–195. https://doi.org/10.5964/jnc.10035

Benz, C. (2012). Attitudes of Kindergarten Educators about Math. *Journal für Mathematik-Didaktik, 33*(2), 203–232. https://doi.org/10.1007/s13138-012-0037-7

Bochnik, K. (2017). *Sprachbezogene Merkmale als Erklärung für Disparitäten mathematischer Leistung. Differenzierte Analyse im Rahmen einer Längsschnittstudie in der dritten Jahrgangsstufe.* Waxmann.

Bochnik, K. & Ufer, S. (2016). Die Rolle (fach-)sprachlicher Kompetenzen zur Erklärung mathematischer Kompetenzunterschiede zwischen Kindern mit deutscher und nicht-deutscher Familiensprache. *Zeitschrift für Grundschulforschung, 9*(1), 135–147.

Bruns, J., & Eichen, L. (2018). EmMa—Fortbildung für elementarpädagogische Fachperson zur frühen mathematischen Bildung. In R. Biehler, T. Lange, T. Leuders, B. Rösken-Winter, P. Scherer, & C. Selter (Eds.), *Mathematikfortbildungen professionalisieren. Konzepte, Beispiele und Erfahrungen des Deutschen Zentrums für Lehrerbildung Mathematik* (S. 417–434). Springer Berlin Heidelberg.

Bruns, J., Hagena, M., & Gasteiger, H. (2023). Professional development enacted by facilitators in the context of early mathematics education: Scaling up or Dilution of Effects? *Teaching and Teacher Education.* 132, 104270. https://doi.org/10.1016/j.tate.2023.104270

Flottmann, N., Streit-Lehmann, J., & Peter-Koop, A. (2021). *Elementar-Mathematisches BasisInterview. Materialpaket zum Handbuch Diagnostik.* Mildenberger.

Fuson, K. C. (1992). Research in teaching and learning addition and subtraction of whole numbers. In G. Leinhardt, R. T. Putnam, & R. A. Hattrup (Hrsg.), *Analysis of arithmetic for mathematics teaching* (S. 53–188). L. Erlbaum Associates.

Fyfe, E. R., Rittle-Johnson, B., & Farran, D. C. (2019). Predicting success on high-stakes math tests from pre-school math measures among children from low-income homes. *Journal of Educational Psychology*, 111 (3), 402–413. https://doi.org/10.1037/edu0000298

Gasteiger, H., & Benz, C. (2018). Enhancing and analyzing kindergarten teachers' professional knowledge for early mathematics education. *Journal of Mathematical Behavior,* 51, 109–117. https://doi.org/10.1016/j.jmathb.2018.01.002

Gasteiger, H., & Moeller, K. (2021). Fostering early numerical competencies by playing conventional board games. *Journal of Experimental Child Psychology,* 204, 105060, 1-15. https://doi.org/10.1016/j.jecp.2020.105060.

Geary, D. C. (2011). Cognitive predictors of achievement growth in mathematics: A 5-year longitudinal study. *Developmental Psychology*, 47 (6), 1539–1552. https://doi.org/10.1037/a0025510

Gelman, R., & Gallistel, C. R. (1986). *The child's understanding of number* (2. Aufl.). Harvard University Press.

Heinze, A., Herwartz-Emden, L. & Reiss, K. (2007). Mathematikkenntnisse und sprachliche Kompetenz bei Kindern mit Migrationshintergrund zu Beginn der Grundschulzeit. *Zeitschrift für Pädagogik, 53*(4), 562-581.

Karahisarlioglu, S., & Fritz-Strathman, A. (2024). *Kita-Kinder entdecken Mathe.* Verlag an der Ruhr.

Lipowsky, F.; Rzejak, D. (2021). *Fortbildungen für Lehrpersonen wirksam gestalten. Ein praxisorientierter und forschungsgestützter Leitfaden.* Bertelsmann Stiftung. https://www.bertelsmann-stiftung.de/de/publikationen/publikation/did/fortbildungen-fuer-lehrpersonen-wirksam-gestalten

Lorenz, J. H. (1998). A*nschauung und Veranschaulichungsmittel im Mathematikunterricht. Mentales visuelles Operieren und Rechenleistungen.* Hogrefe.

Monville, Ch. (2024). *Beobachten und Dokumentieren von arithmetischen Kompetenzen im Elementarbereich. Eine explorative Studie zu Kompetenzen von Fachkräften.* Unveröffentlicht. Pädagogische Hochschule Karlsruhe.

Paetsch, J., Radmann, S., Felbrich, A., Lehmann, R. & Stanat, P. (2016). Sprachkompetenz als Prädiktor mathematischer Kompetenzentwicklung von Kindern deutscher und nicht-deutscher Familiensprache. *Zeitschrift für Entwicklungspsychologie und pädagogische Psychologie, 48*(1), 27–41.

Prediger, S. (2013). Darstellungen, Register und mentale Konstruktion von Bedeutungen und Beziehungen – mathematikspezifische sprachliche Herausforderungen identifizieren und bearbeiten. In M. Becker-Mrotzek, K. Schramm, E. Thürmann & H. J. Vollmer (Hrsg.), *Sprache im Fach. Sprachlichkeit und fachliches Lernen* (S. 167–183). Waxmann.

Prediger, S., Wilhelm, N., Büchter, A., Gürsoy, E. & Benholz, C. (2015). Sprachkompetenz und Mathematikleistung – Empirische Untersuchung sprachlich bedingter Hürden in den Zentralen Prüfungen 10. *Journal für Mathematik-Didaktik,* 36(1), 77-104.

Prediger, S. & Wessel, L. (2012). Darstellungen vernetzen: Ansatz zur integrierten Entwicklung von Konzepten und Sprachmitteln. *PM: Praxis der Mathematik in der Schule, 54*(45), 28–33.

Redder, A. (2013). Sprachliches Kompetenzgitter. Linguistisches Konzept und evidenzbasierte Ausführung. In A. Redder & S. Weinert (Hrsg.), *Sprachförderung und Sprachdiagnostik. Interdisziplinäre Perspektiven* (S. 108–134). Waxmann.

Rittle-Johnson, B., Fyfe, E. R., Hofer, K. G., & Farran, D. C. (2017). Early Math Trajectories: Low-Income Children's Mathematics Knowledge From Ages 4 to 11. *Child Development, 88*(5), 1727–1742. https://doi.org/10.1111/cdev.12662

Schneider, W., Küspert, P., & Krajewski, K. (2021). *Die Entwicklung mathematischer Kompetenzen* (3., aktualisierte und erweiterte Auflage). utb GmbH. https://doi.org/10.36198/9783838557472

Schulz, A. & Wartha, S. (2021). *Zahlen und Operationen am Übergang Primar-/ Sekundarstufe. Grundvorstellungen aufbauen, festigen, vernetzen.* Springer.

Skopek, J., & Passaretta, G. (2020). *Socioeconomic Inequality in Children's Achievement from Infancy to Adolescence: The Case of Germany*. https://doi.org/10.1093/sf/soaa093

Söbbeke, E. (2005). *Zur visuellen Strukturierungsfähigkeit von Grundschulkindern – Epistemologische Grundlagen und empirische Fallstudien zu kindlichen Strukturierungsprozessen mathematischer Anschauungsmittel.* Franzbecker.

Strahl, C. & Bruns, J. (i.V.). *Mathematikbezogenes Wissen, Einstellungen und Lerngelegenheiten als Einflussfaktoren der situativen Beobachtung und Wahrnehmung angehender frühpädagogischer Fachkräfte. Frühe Bildung.*

Tiedemann, K. (2020). Praktiken des Beschreibens. Zu Funktionen der Sprache bei der Erarbeitung des Teilschrittverfahrens im Zahlenraum bis 100. *Journal für Mathematik-Didaktik, 41*(1), 11–41.

Tiedemann, K. (2015). Unterrichtsfachsprache. Zur interaktionalen Normierung von Sprache im Mathematikunterricht der Grundschule. *mathematica didactica, 38*(1), 37–62.

Tiedemann, K. (2012). *Mathematik in der Familie: Zur familialen Unterstützung früher mathematischer Lernprozesse in Vorlese- und Spielsituationen.* Waxmann.

Tiedemann, K. & Benz, C. (2022). Mit Kindern über Strukturen sprechen. In A.-K. Harr & B. Geister (Hrsg.), *Sprachförderung in Kindertagesstätte* (S. 409–425). Schneider.

Tiedemann, K. & Fetzer, M. (2018). The interplay of language and objects in the process of abstracting. In J. Moschkovich, D. Wagner, J. Rodrigues Mendes & M. Schütte (Hrsg.), *Language and communication in mathematics education – international perspectives* (S. 91–104). Springer.

Wessel, L. (2015). *Fach- und sprachintegrierte Förderung durch Darstellungsvernetzung und Scaffolding. Ein Entwicklungsforschungsprojekt zum Anteilbegriff.* Springer Spektrum.

Abzählen von verschieden repräsentierten Zählobjekten

Eine empirische Überprüfung vermeintlicher Offensichtlichkeiten

Pia Kerstingjohänner, Julia Streit-Lehmann & Jessica Hoth

Abstract

Das sichere Abzählen von Anzahlen in einem Zahlenraum von ungefähr 20 gilt als eine der wichtigsten Vorläuferfähigkeiten, die Kinder zum Zeitpunkt der Einschulung typischerweise bereits entwickelt haben (sollten). Seit vielen Jahren wird die Bedeutung von Zählkompetenzen für den weiteren arithmetischen Kompetenzerwerb im Kontextschulischen Mathematiklernens betont. Dabei steht meist der Übergang Kita-Grundschule im Fokus. In der Schule hingegen wird dem Zählen eine vergleichsweise geringe Bedeutung zugeschrieben; die Begriffe *Zählen* oder *Abzählen* gehören nicht zu den curricular verankerten Kompetenzerwartungen. In diesem Beitrag wird von einer Studie berichtet, die mit n=250 Grundschulkindern aller vier Klassenstufen durchgeführt wurde. Die Kinder sollten im Zahlenraum bis 30 zählend die Mächtigkeiten von Mengen ermitteln, wobei die jeweiligen Mengen entweder als reale, unstrukturierte Gegenstände repräsentiert waren (Muggelsteine auf dem Tisch) oder als Muggelstein-ähnliche Punkte in einem linear strukturierten Punktebild auf einem Blatt Papier. Dabei wurde untersucht, ob die Rate korrekt gefundener Zählergebnisse von der Art der Repräsentation und von der Klassenstufe abhängt. Die Ergebnisse geben Aufschluss darüber, ob sich die intuitiven Vermutungen, dass ältere Kinder besser zählen als jüngere und dass echte Muggelsteine leichter abzuzählen sind als Punkte auf Papier, bestätigen.

Zählkompetenzen, Abzählen, Repräsentationsebenen,Anzahlbestimmung

Theoretische Grundlagen

Die Entwicklung von Zählkompetenzen ist ein zentraler Bestandteil der allgemeinen Zahlbegriffsentwicklung junger Kinder und beginnt weit vor der Einschulung. Fuson (1988) unterscheidet hierbei das verbale Zählen (*saying number words in a sequence*), das Zählen mit Objekten (*saying number words in correspondence with indicating objects*) und kardinales Zählen bzw. Abzählen (*referring to the number of [...] objects by a single number word*). Das Abzählen stellt auf sprachlicher und operativer Ebene für junge Kinder einen Zugang zur Quantifizierung von Mengen dar und leistet somit einen wichtigen Beitrag zur allgemeinen Zahlbegriffsentwicklung.

Zählkompetenz als Prädiktor für mathematische Leistung

Seit Jahrzehnten ist bekannt, dass diejenigen mathematischen Kompetenzen, die Kinder bereits vor der Einschulung erwerben, einen großen Einfluss auf ihre spätere schulische Mathematikleistung haben. In der LOGIK-Studie (vgl. Stern, 2009) wurde nachgewiesen, dass das bereichsspezifische Vorwissen hinsichtlich des späteren Schulerfolgs mindestens so bedeutsam ist wie die Intelligenz. Somit kommt der frühen mathematischen Bildung im Rahmen der gesamten frühkindlichen Bildung eine bedeutende Rolle zu. Defizite in der Mengenauffassung, beim Wissen über Zahlen sowie beim Abzählen konnten bei Vorschulkindern als besondere Risikofaktoren für eine spätere Rechenschwäche identifiziert werden (vgl. Krajewski & Scheider 2006). Die Relevanz grundlegender numerischer Kompetenzen wie das Abzählen von Gegenständen oder das Zerlegen und Erfassen kleiner Mengen für das weitere Mathematiklernen wird seit den 1970er Jahren in zahlreichen Untersuchungen immer wieder herausgestellt (z. B. bei Gelman & Gallistel, 1978; Krajewski & Schneider, 2006; Krajewski & Ennemoser, 2013).

In diesem Zusammenhang hat sich zudem gezeigt, dass die spätere Mathematikleistung durch die im Vorschulalter erhobenen Zählfertigkeiten relativ sicher vorhergesagt werden kann (vgl. Aunola et al., 2004). Diese Vorhersagekraft ist kein rein statistischer Effekt, sondern ist bedingt durch den inhaltlichen Zusammenhang der Zählentwicklung mit dem Erwerb weiteren arithmetischen Wissens. So ist die Fähigkeit, erste Additionen und Subtraktionen zu lösen, auf entsprechende Zählkompetenzen zurückzuführen (vgl. Fuson, 1988; Gelman & Gallistel, 1978), außerdem können einige Strukturen des dekadischen Stellenwertsystems, etwa die sich wiederholenden Wortbestandteile unserer Zahlwörter, durch Zählaktivitäten wahrgenommen und bewusst gemacht werden. Auch die Entwicklung des präzisen Anzahlkonzepts im ZGV-Modell nach Krajewski & Ennemoser (2013) ist dadurch gekennzeichnet, dass ordinale Rangfolgeeigenschaften von Zahlen, die wesentlich mit der stabilen Zahlwortreihe zusammenhängen, mit den entsprechenden kardinalen Eigenschaften verknüpft werden. Somit ist das Zählen eine wichtige Basiskompetenz hinsichtlich der Entwicklung von Rechenkompetenz.

Die Zählfertigkeiten, die viele Kinder typischerweise bereits vor Schuleintritt erwerben, werden in der Schuleingangsphase zumeist bei *allen* Kindern erwartet. So basieren etwa viele Schulbuchabbildungen zur Mengen-Zahl-Zuordnung in Klasse 1 darauf, dass die Kinder Gegenstände abzählen sollen (oder die betreffende Menge „irgendwie“ anders erfassen) und diese dann mit dem passenden Zahlsymbol verknüpfen. Der Wunsch nach der Anschlussfähigkeit schulischer Lernangebote erklärt zum Teil, warum in empirischen Studien besonders häufig Kinder kurz vor oder kurz nach der Einschulung betrachtet werden. Im Kontext schulischen Mathematiklernens steht dann jedoch nicht der Ausbau oder gar die Kultivierung von Zählkompetenzen im Fokus des arithmetischen Anfangsunterrichts, sondern im Gegenteil die Ablösung vom Zählen zugunsten der Entwicklung von Rechenstrategien, mit dem Argument, dass anhaltendes Zählen, in Abgrenzung zur rechnerischen Bewältigung von Additionen und Subtraktionen, als wichtigstes Symptom für Rechenstörungen gilt (vgl. Schipper, 2009). Dies trägt möglicherweise zur Erklärung der Tatsache bei, dass es relativ wenig Untersuchungen dazu gibt, wie sich Zählkompetenzen bei älteren Kindern (weiter)entwickeln.

Entwicklung und Förderung von Zählkompetenzen

Typische Entwicklungsverläufe hinsichtlich der Zählkompetenzen *jüngerer* Kinder sind im Vergleich deutlich besser erforscht. Hierzu haben besonders Fuson und Kolleg:innen (1988) sowie Gelman und Gallistel (1978) beigetragen, deren Begriffskonzepte zur Beschreibung und Beurteilung kindlicher Performanz im Rahmen von Zähl- und Abzählaktivitäten bis heute etabliert sind: Die drei *how-to-count*-Prinzipien nach Gelman und Gallistel (ebd., S. 80) müssen eingehalten sein, wenn ein Abzählprozess erfolgreich zur Anzahlbestimmung genutzt werden soll. Zu diesen Prinzipien gehören das Eindeutigkeitsprinzip (jedem Objekt wird genau ein Zahlwort zugeordnet), das Prinzip der stabilen Ordnung (die Zahlwörter werden in einer festen Reihenfolge genannt) und das Kardinalprinzip (das letztgenannte Zahlwort gibt die Anzahl aller Objekte an). Kindern kann immer dann sämtlich Einsicht in die drei how-to-count-Prinzipien unterstellt werden, wenn sie Anzahlen korrekt zählend bestimmen, also wenn Abzählprozesse gelingen. Darüber hinaus müssen Kinder nach Gelman und Gallistel (ebd., S. 81f.) die Einsicht entwickeln, dass die drei *how-to-count*-Prinzipien prinzipiell auf alle Arten von Objekten angewendet werden können (Abstraktionsprinzip) und dabei die Reihenfolge, in der die Objekte gezählt werden, hinsichtlich des Zählergebnisses egal ist (Prinzip der Irrelevanz der Reihenfolge). Die operative, auch koordinative Herausforderung dabei ist die Organisation des *partitioning* und *tagging* (ebd., S. 77): Die zu zählenden Objekte werden während des Abzählprozesses permanent in zwei veränderliche Teilmengen zerlegt (*partitioning*). Die eine Teilmenge besteht aus den noch nicht gezählten, die andere Teilmenge aus bereits gezählten Objekten. Die bereits gezählten Objekte sind dadurch gekennzeichnet, dass ihnen bereits Zahlwörter zugeordnet wurden (*tagging*). Während des Abzählprozesses verändern sich die Mächtigkeiten der beiden Teilmengen mit jedem weiteren *tagging*-Vorgang. Gerade bei größeren Mengen erfordert das *partitioning* auch bei geübten zählenden Personen eine gute Konzentration und Koordination, um Zählfehler wie das versehentliche Vergessen/Übersehen sowie das doppelt/mehrfach Zählen von Objekten zu vermeiden, die ja nicht auf fehlende Einsicht in Gelman und Gallistels Zählprinzipien, sondern auf bloßes "Durcheinanderkommen" und fehlende spontane Kontrollmöglichkeiten zurückzuführen sind.

Kinder sind typischerweise bereits deutlich vor der Einschulung in der Lage, Anzahlen durch Abzählen zu bestimmen (vgl. Krajewski, Renner, Nieding, & Schneider, 2008). Ein Teil der Kinder weist zu Schulbeginn allerdings einen Rückstand in der Entwicklung bereichsspezifischen Vorwissens wie beispielsweise Abzählen auf, wie Untersuchungen zur Diagnose und vorschulischen Förderung (vgl. Van de Rijt,Van Luit & Hasemann, 2000) zeigen. Bei diesen Kindern ist das Risiko für Schwierigkeiten beim Rechnen Lernen erhöht (vgl. Weißhaupt, Peucker & Wirtz, 2006).

Eine früh ansetzende Förderung mathematischer Basiskompetenzen ist daher entscheidend, um der Entwicklung einer Rechenschwäche präventiv entgegenzuwirken und die Kinder in ihrem mathematischen Lernprozess optimal zu begleiten. Die positiven Effekte der Förderung der Basiskompetenzen konnten laut Van Luit und Van de Rijt (1997) sowie Griffin, Case und Capodilupo (1995) über einen längeren Zeitraum beibehalten werden. Die geförderten Kinder konnten ihre Leistungen so steigern, dass sie der Normstichprobe entsprachen.

Ein halbes Jahr vor Schulbeginn zählen Kinder durchschnittlich etwa 20, zwei Monate vor Schulbeginn durchschnittlich etwa 28 Objekte korrekt ab (vgl. Krajewski & Schneider, 2006). Aus diesem Grund wurden für die vorliegende Studie Mengen im Zahlenraum 30 gewählt.

Repräsentation von Zählobjekten

In der Mathematikdidaktik findet das EIS-Prinzip nach Bruner (vgl. Bruner, Olver & Greenfield, 1971) intensive Beachtung. Beim gelingenden inter- und intramodalen Transfer zwischen den drei namensgebenden Darstellungsebenen *enaktiv – ikonisch – symbolisch*, auf denen mathematischer Gehalt repräsentiert sein kann, werden Grundvorstellungen aktiviert, wodurch ein Verständnis des mathematischen Gegenstands (weiter-)entwickelt und unterstellt werden kann. Für die vorliegende Studie spielen unterschiedliche Repräsentationen ebenfalls eine Rolle: Zwar gehen Kinder, die abzählen, grundsätzlich enaktiv mit den abzuzählenden Objekten um, aber es sind verschiedene Arten der Repräsentation der Zählobjekte möglich: Es können reale, gegenständliche Zählobjekte zum Einsatz kommen, die berührt, bewegt und spontan strukturiert werden können, oder ikonisch präsentierte Zählobjekte (digital oder auf Papier o.ä.), die zwar angeschaut und berührt (etwa angetippt oder abgedeckt oder durchgestrichen), aber nicht einzeln bewegt werden können, oder es können abstrakte, mental repräsentierte Zählobjekte abgezählt werden, etwa wenn die Anzahl von Buchstaben in Wörtern oder der Monate bis Weihnachten ermittelt werden sollen. Hier ist nur gedankliches Agieren möglich, aber kein gegenständliches Handeln. Diese Unterschiede lassen intuitiv Auswirkungen auf die Zählgenauigkeit vermuten.

Hypothesen und Forschungsfragen

Basierend auf den bisherigen Ausführungen können daher folgende Hypothesen aufgestellt werden:

H1) *Das Abzählen real repräsentierter Gegenstände geht mit höheren Lösungsraten einher als das Abzählen ikonisch repräsentierter Gegenstände.* Diese Hypothese wird mit der potenziell besseren Unterscheidungsmöglichkeit noch nicht gezählter und bereits gezählter Zählobjekte während des Abzählprozesses (*tagging*) begründet.

H2) *Der Zählerfolg nimmt mit der Jahrgangsstufe zu: Ältere Kinder erzielen höheren Lösungsraten als jüngere Kinder.* Diese Hypothese wird mit der Zunahme an Aufmerksamkeit und Konzentrationsvermögen, Umgang mit Zahlen und Erfahrung mit Zählsituationen älterer Kinder begründet.

Die Forschungsfragen dienen der Überprüfung der Hypothesen und lauten daher:

F1) Inwiefern unterscheiden sich die Lösungsraten beim Abzählen bestimmter Mengen hinsichtlich der Repräsentationsform (real repräsentiert vs. ikonisch repräsentiert)?

F2) Inwiefern unterscheiden sich die Lösungsraten zwischen verschiedenen Klassenstufe?

Methodisches Vorgehen

Die Stichprobe bestand aus insgesamt 220 Kindern einer nordrhein-westfälischen Grundschule. 53 der teilnehmenden Kinder besuchten zum Erhebungszeitpunkt (November/Dezember 2024) die erste Klasse, 46 Kinder die zweite Jahrgangsstufe, 77 Kinder waren in der dritten und 44 Kinder in der vierten Klasse. In keiner Klasse war zuvor das Abzählen in irgendeiner Weise expliziter Unterrichtsgegenstand. Der Erhebung wurde im Klassenkontext in Form eines Paper-Pencil-Gruppentests durchgeführt. Jedes der 220 Kinder löste sechs Zählaufgaben: drei Aufgaben mit realen Zählobjekten (Muggelsteinen) auf dem Tisch, die enaktives Hantieren wie

Antippen und Verschieben des Materials zulassen, und drei Aufgaben, bei denen die zu zählenden Objekte (bunte Punkte) auf einem Arbeitsblatt abgedruckt waren und dementsprechend Antippen oder Markieren, aber kein Verschieben erlauben (siehe Abbildung 1). Die Punkte waren in Größe und Optik den Muggelsteinen ähnlich. Die Anzahlen der Objekte waren in den beiden Aufgabensets jeweils gleich: acht, 17 und 26 Muggelsteine bzw. acht, 17 und 26 Punkte in den Punktebildern. Da die Zählaufgaben auch in der ersten Klasse eingesetzt wurden, sollte die Anzahl der Zählobjekte den Zahlenraum 30 nicht überschreiten und dennoch die Anzahlen in den Zählaufgaben variieren.

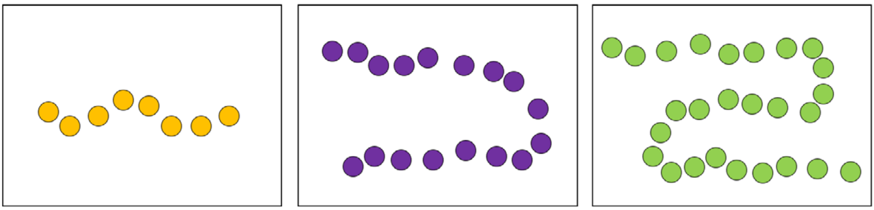


Abb. 1: Punktebilder mit acht, 17 und 26 ikonisch repräsentierten Zählobjekten.

Die bunten Punkte waren nicht unstrukturiert, sondern jeweils in einer Schlangenform angeordnet. Diese Anordnung wurde in der Annahme gewählt, dass Kinder das *partitioning* der Muggelsteine intuitiv durch Webschieben o.ä. organisieren würden, was eine simple Form einer linearen Eigenstrukturierung darstellt („hier die, die ich schon hab, und da drüben die, die ich noch zählen muss"). Die Schlangenform sollte eine vergleichbare lineare Strukturierung liefern, indem das *partitioning* hier mit dem Abschreiten eines Weges einhergeht. Für die drei Zählaufgaben, in denen jeweils die Anzahl der Muggelsteine ermittelt werden sollte, erhielt jedes Kind jeweils einen Beutel mit der entsprechenden Anzahl an Steinen. Die Zählergebnisse sollten jeweils auf einem vorbereiteten Blatt Papier notiert werden. Es gab keine weiteren Anweisungen, Hilfestellungen oder Einschränkungen seitens der Testleitung; der Auftrag war lediglich: „Wie viele Punkte bzw. Steine sind das? Zähl mal bitte!" Die Erhebungen fanden in allen Klassen standardisiert und mit derselben Testleitung statt. Die Durchführungszeit betrug jeweils ca. 15-20 Minuten.

Ein korrektes Zählergebnis wurde mit 1 Punkt gewertet, ein falsches oder fehlendes Zählergebnis mit 0 Punkten. Auf dieser Datenbasis wurde zunächst mithilfe des Kolmogorov-Smirnov-Tests und dem Shapiro-Wilk-Test geprüft, ob eine Normalverteilung der Daten vorliegt (vgl. Döring, 2023). Beide Tests deuten darauf hin, dass nicht von einer Normalverteilung der Daten auszugehen ist. Um vor diesem Hintergrund Unterschiede der Mittelwerte in den beiden Zählsituationen (Forschungsfrage 1) und hinsichtlich der Klassenstufen (Forschungsfrage 2) zu testen, wurde einerseits der Wilcoxon-Test und andererseits der Kruskal-Wallis-Test für die Analyse herangezogen (vgl. Fahrmeir et al., 2023).

Ergebnisse

Tabelle 1 zeigt die deskriptive Statistik zu den Lösungsraten der Kinder in den sechs Zählaufgaben. Um im Sinne der ersten Forschungsfrage herauszufinden, inwiefern sich die Lösungsrate der Kinder in den zwei Zählsituationen (real repräsentiert/ikonisch repräsentiert) und beim Abzählen unterschiedlicher Mengen unterscheidet, wurden die Mittelwertsunterschiede der Kinder in den jeweiligen Aufgaben mit gleicher Menge an Zählobjekten aber unterschiedlich repräsentierten Zählobjekten mithilfe des Wilcoxon-Tests geprüft. Es zeigt sich, dass die Kinder die ikonisch dargestellten Mengen mit 8 und 26 Elementen signifikant genauer zählen als in den Situationen, in denen das Zählmaterial real repräsentiert ist ($z = -2.84$, $p < .006$; $z = -4.00$, $p < .001$).

Item	M (SD) Kl. 1	M (SD) Kl. 2	M (SD) Kl. 3	M (SD) Kl. 4	M (SD) Gesamt
Enaktiv 8	0.98 (0.14)	0.89 (0.31)	0.95 (0.22)	0.93 (0.25)	0.94 (0.24)
Enaktiv 17	0.70 (0.46)	0.89 (0.31)	0.95 (0.22)	0.89 (0.32)	0.86 (0.34)
Enaktiv 26	0.42 (0.50)	0.70 (0.47)	0.62 (0.49)	0.89 (0.32)	0.64 (0.48)
Ikonisch 8	0.98 (0.14)	0.98 (0.15)	1.00 (0.00)	1.00 (0.00)	0.99 (0.95)
Ikonisch 17	0.74 (0.45)	0.91 (0.28)	0.97 (0.16)	1.00 (0.00)	0.91 (0.29)
Ikonisch 26	0.53 (0.50)	0.76 (0.43)	0.88 (0.32)	0.95 (0.21)	0.79 (0.41)

Tabelle 1: Lösungsraten der sechs Abzähl-Items.

Mit Blick auf die zweite Forschungsfrage nach den Lösungsraten verschiedener Klassenstufen zeigte der Kruskal-Wallis-Test signifikante Unterschiede zwischen den Kindern der unterschiedlichen Klassenstufen beim Zählen von 17- und 26-elementigen Mengen – sowohl beim Zählen mit real repräsentiertem Material als auch beim Zählen von ikonisch dargestelltem Zählmaterial (real repräsentiert 17 Elemente: (df = 3, n = 220) = 17,402, $p < .001$; ikonische repräsentiert 17 Elemente: (df = 3, n = 220) = 27,459, $p < .001$; real repräsentiert 26 Elemente: (df = 3, n = 220) = 23,854, $p < .001$ und ikonisch repräsentiert 26 Elemente (df = 3, n = 220) = 32,737, $p < .001$)

Bei genauerer Analyse der Unterschiede zwischen den einzelnen Klassenstufen zeigt sich, dass es signifikante Unterschiede zwischen den Kindern der ersten Jahrgangsstufe und den Kindern aller anderen Jahrgangsstufen (1-2; 1-3; 1-4) bei den vier Aufgaben mit 17 und 26 Elementen gibt. Zwischen den anderen Jahrgangsstufen ergeben sich signifikante Unterschiede im Zählerfolge der Klassenstufen 3 und 4 beim Zählen von 26 real repräsentierten Objekten und zwischen den Klassenstufen 2 und 4 beim Zählen von 26 ikonisch repräsentierten Zählobjekten.

Schließlich wurde mit dem Wilcoxon-Test auf Unterschiede innerhalb jeder der vier Klassenstufen in den zwei Zählsituationen getestet. Bei den Kindern der ersten und zweiten Klasse ergaben sich keine Unterschiede in der Lösungshäufigkeit der real repräsentierten und ikonisch gegebenen Zählanforderungen. Bei den Kindern in der dritten Klasse lässt sich jedoch ein signifikanter Unterschied bei der Lösungshäufigkeit der Zählaufgaben mit 8 und 26 Elementen finden ($z = 2.00$, $p < .05$ bzw. $z = 3.54$, $p < .001$). Bei den Kindern der vierten Klassenstufe zeigt sich ein signifikanter Unterschied beim Zählerfolg einer 17-elementigen Menge ($z = 2.24$, $p < .05$),

Damit können die beiden Forschungsfragen zusammengefasst folgendermaßen beantwortet werden: Bei zwei der drei Zählaufgaben kamen die 220 Kinder in den Aufgaben mit ikonisch repräsentierten Zählobjekte zu signifikant höheren Lösungsraten als bei Aufgaben mit real repräsentierten Objekten. Die erste Hypothese hat sich also nicht bestätigt. Im Gegenteil: Die Kinder zählen ikonisch dargestellte Mengen erfolgreicher als real repräsentierte Mengen gleicher Mächtigkeit.

Bezüglich der zweiten Forschungsfrage zeigt sich nach der ersten Klasse ein signifikanter Anstieg in den Lösungsraten der Kinder beim Zählen von 17- und 26-elementigen Mengen – unabhängig von der Darstellung. Weitere Verbesserungen in höheren Klassenstufen können kaum festgestellt werden.

Implikationen

Aus den gefundenen Ergebnissen lassen sich einige Forschungsdesiderata ableiten: Es besteht Klärungsbedarf hinsichtlich der individuellen Entwicklungsverläufe von Kindern. Lernen zum Beispiel Kinder, die in Klasse 1 nicht gut abzählen können, das Abzählen einfach später, und wenn ja, wann? Oder bleiben schwache Zähler:innen schwache Zähler:innen? Entwickeln Kinder, die in Klasse 1 und 2 gut abzählen können, ihre Abzählkompetenzen automatisch weiter und erfinden selbst elaboriertere Zählstrategien wie beispielsweise das Abzählen in Schritten oder spontanes Bündeln? Hierzu sind Studien denkbar, die individuelle Trajektorien über mehrere Jahre hinweg dokumentieren.

Es ist hinreichend belegt, dass das Zählen als Basiskompetenz für Kinder rund um die Einschulung ein guter Prädiktor der späteren schulischen mathematischen Leistung ist. In diesem Zusammenhang ist die Rolle des (Ab-)Zählens als Prädiktor für ältere Kinder allerdings ungeklärt: Lassen sich beispielweise anhand der Abzählperformanz von Zweit- oder Drittklässler:innen Voraussagen ihrer mathematischen schulischen Leistung in Klasse 4 oder der Sekundarstufe machen? Antworten auf diese Fragen würden Hinweise liefern, inwiefern die Thematisierung von Zähl- bzw. Abzählprozessen beispielsweise in Fördersettings leistungsschwacher *älterer* Kinder lohnenswert erscheint.

Die vorliegende Studie weist einige Limitationen auf: Die Teilstichprobenumfänge sind vergleichsweise gering und die Gesamtstichprobe nicht repräsentativ, so dass die gefundenen Ergebnisse nicht ohne weiteres übertragbar sind. Ein größerer Aufgabenfundus hätte es erlaubt, intern-reliable Skalen zu bilden; für die vorliegende Studie wurde im Prinzip für jede verborgene Variable lediglich ein einziges Item verwendet, was zwar eine sehr ökonomische Durchführung ermöglicht, jedoch kaum sinnvolle inferenzstatistische Betrachtungen zulässt. Zudem könnten noch genauere Annahmen getroffen und dann entsprechend überprüft werden, was genau eine Abzählaufgabe leicht oder schwierig macht. Hierbei könnten insbesondere auch *anders* und *un*strukturierte ikonische Darstellungen zum Einsatz kommen.

Schul- und unterrichtspraktischer Ausblick

Neben den oben genannten Desiderata ergeben sich auch unterrichtsbezogene Implikationen. Besonders zu Schulbeginn, wenn die Diagnostik des Entwicklungsstands von Vorläuferfähigkeiten im Fokus steht, bieten Zählaktivitäten auf unterschiedlichen Schwierigkeitsniveaus allen Kindern Gelegenheit, wichtige Basiskompetenzen zu entwickeln und auszubauen. Hierbei eignen sich ordinale Zählaktivitäten wie vorwärts- und rückwärtszählen, das Zählen in Schritten und das Zählen von verschiedenen Startzahlen aus, sowie kardinale Anzahlbestimmungsaktivitäten, in denen die drei *how-to-count*-Prinzipien im Vordergrund stehen. Hierbei sollten ikonisch repräsentierte, enaktiv repräsentierte und auch mental repräsentierte Zähobjekte zum Einsatz kommen. Häufig wird bei Abzählprozessen in der Schule auf enaktiv repräsentiertes Zählmaterial zurückgegriffen, was mit hohen Anforderungen hinsichtlich Logistik und Aufwand verbunden ist, wenn die abzuzählenden Mengen im Klassenumfang bereitgestellt werden müssen. Unsere Ergebnisse lassen darauf schließen, dass hier häufig ebenso gut ikonisch präsentiertes Material eingesetzt werden könnte, was den Ressourcenaufwand verringert.

Weitere Forschungen könnten zeigen, welche Relevanz das Zählen auch nach Klasse 1 als Basiskompetenz hat, etwa in gezielten mathematischen Fördersettings für ältere Kinder.

Literaturverzeichnis

Aunola, K., Leskinen, E., Lerkkanen, M.-K. und Nurmi, J.-E. (2004). Developmental dynamics of mathematical performance from preschool to grade 2. *Journal of Educational Psychology*, 96, 699-713.

Bruner, J. S., Olver, R. R. & Greenfield, P. M. (1971). *Studien zur kognitiven Entwicklung.* Klett.

Döring, N. (2023). *Forschungsmethoden und Evaluation in den Sozial- und Humanwissenschaften.* Springer. https://doi.org/10.1007/978-3-662-64762-2

Fahrmeir, L.; Heumann, C.; Künstler, R.; Pigeot, I.; Tutz, G. (2023). *Statistik – Der Weg zur Datenanalyse.* 9. Aufl., Springer. 10.1007/978-3-662-67526-7

Fuson, K. C. (1988). *Children's counting and concepts of number.* Springer.

Gelman, R. & Gallistel, C. R. (1978). *The child's understanding of number.* Harvard University Press.

Griffin, S., Case, R., Capodilupo, A. (1995). Teaching for understanding: The importance of the central conceptual structures in the elementary mathematics curriculum. In: A. McKeough, J. Lupart, A. Marini (Eds.). *Teaching for Transfer: Fostering generalization in learning. Hillsdale,* NJ, pp. 123-152.

Krajewski, K. & Schneider, W. (2006). Mathematische Vorläuferfertigkeiten im Vorschulalter und ihre Vorhersagekraft für die Mathematikleistungen bis zum Ende der Grundschulzeit. *Psychologie in Erziehung und Unterricht*, 53, 246-262.

Krajewski, K., Renner, A., Nieding, G. & Schneider, W. (2008). Frühe Förderung von mathematischen Kompetenzen im Vorschulalter. *Zeitschrift für Erziehungswissenschaft, 11*(91-103).

Krajewski, K. & Ennemoser, M. (2013). Entwicklung und Diagnostik der Zahl-Größen Verknüpfung zwischen 3 und 8 Jahren. In: M. Hasselhorn, A. Heinze, W. Schneider, E. Trautwein (Eds.), *Diagnostik mathematischer Kompetenzen. Tests und Trends.* Neue Folge. Band 11 (S. 41-65). Hogrefe.

Schäfer, T. (2016). *Methodenlehre und Statistik. Einführung in Datenerhebung, deskriptive Statistik und Inferenzstatistik.* Springer. https://doi.org/10.1007/978-3-658-11936-2

Schipper, W. (2009). *Handbuch für den Mathematikunterricht an Grundschulen.* Schroedel.

Stern, E. (2009). Früh übt sich: Neuere Ergebnisse aus der LOGIK-Studie zum Lösen mathematischen Textaufgaben, in: A. Fritz, G. Ricken, S. Schmidt (Hrsg.) (2009). *Handbuch Rechenschwäche: Lernwege, Schwierigkeiten und Hilfen bei Dyskalkulie,* (2., vollständig überarbeitete Aufl.). Beltz.

Van de Rijt, B. A. M., Van Luit, J. E. H. & Hasemann, K.(2000). Zur Messung der frühen Zahlbegriffsentwicklung. *Zeitschrift für Entwicklungspsychologie und Pädagogische Psychologie, 32*, 14 – 24.

Van Luit, J.E.H./Van de Rijt, B.A.M. (1997). Stimulation of early mathematical competence. In: M. Beishuizen, K.P.E. Gravemeijer, E.C.D.M. van Lieshout (Eds.). T*he role of contexts and models in the development of mathematical strategies and procedures.* Utrecht, pp. 215-237.

Weißhaupt, S., Peucker, S., Wirtz, M. (2006). Diagnose mathematischen Vorwissens im Vorschulalter und Vorhersage von Rechenleistungen und Rechenschwierigkeiten in der Grundschule. *Psychologie in Erziehung und Unterricht,* 53(4), 236–245.

Diagnose und Förderung des Stellenwertverständnisses bei natürlichen Zahlen

Verstehensorientiertes und gemeinsames Lernen fokussieren

Petra Scherer & Jennifer Bertram

Abstract

Zur Diagnose und Förderung des Stellenwertverständnisses bei natürlichen Zahlen, als einer zentralen Basiskompetenz im Mathematikunterricht, wurden in dem Projekt „Mathematik aufholen nach Corona" verschiedene Materialien – sowohl für Schülerinnen und Schüler als auch für Lehrkräfte – entwickelt. Im Beitrag werden neben generellen Hintergründen der Materialentwicklung ausgewählte Ergebnisse einer Erprobung im Mathematikunterricht der Grundschule präsentiert, in der sich zeigte, dass die erstellten Aufgaben zu einem verstehensorientierten Lernen beitragen und gemeinsame Lernprozesse ermöglichen konnten. Insbesondere wird dabei herausgestellt, inwiefern die Aufgaben mit einem Fokus auf Muster und Strukturen die Thematisierung zentraler Aspekte des Stellenwertverständnisses (entlang der Prinzipien „Verstehensorientierung" und „Kommunikationsförderung" für einen qualitätsvollen Mathematikunterricht) in heterogenen Lerngruppen ermöglichen können.

Stellenwertsystem, Basiskompetenzen, Inklusion, Heterogenität, gemeinsames Lernen

Einleitung

Nicht erst seit der Corona-Pandemie sind die nicht zufriedenstellenden Leistungen von Grundschülerinnen und Grundschülern im Fach Mathematik immer wieder Gegenstand bildungspolitischer Diskussionen (z. B. SWK, 2022). So verfehlten im Rahmen der TIMS-Studie im Jahr 2021 in Deutschland rund 22 % der Schülerinnen und Schüler die Mindeststandards (vgl. Stanat et al., 2022; zu vergleichbaren Ergebnissen der Erhebung 2023 vgl. Schwippert et al., 2024), und Schwierigkeiten sind i. d. R. in verschiedenen Inhaltsbereichen festzustellen. Fehlende Basiskompetenzen spielen dabei eine zentrale Rolle: Basiskompetenzen sind für selbstständiges und erfolgreiches Lernen im Unterricht – und darüber hinaus – unabdingbar (SWK, 2022) und sind damit auch umfassender zu verstehen als etwa Mindeststandards, die bspw. für einen gewissen Bildungsabschnitt definiert werden (Häsel-Weide & Nührenbörger, 2025). Im Mathematikunterricht gilt es daher, relevante Basiskompetenzen zu diagnostizieren und in besonderer Weise zu fördern.

Eine geeignete Förderung bzw. Unterrichtsgestaltung allgemein orientiert sich an zentralen Leitideen und fokussiert sowohl inhaltsbezogene als auch prozessbezogene Kompetenzen (vgl. z. B. KMK, 2022, S. 6). Mit Blick auf zentrale Unterrichtsprinzipien wurden im Rahmen des Projekts QuaMath (Unterrichts- und Fortbildungs-Qualität in Mathematik entwickeln; quamath.de) die folgenden fünf Prinzipien, basierend auf aktueller fachdidaktischer Forschung, herausgestellt (Holzäpfel et al., 2024): Verstehensorientierung (Konzepte, Strategien und Verfahren grundlegen), Durchgängigkeit (langfristiges Lernen ermöglichen), kognitive Aktivierung (aktive Lernprozesse anregen), Lernenden-Orientierung und Adaptivität (Lernstände aufgreifen) sowie Kommunikationsförderung (über Mathematik sprechen). Alle Prinzipien sollten auch für heterogene bzw. inklusive Lerngruppen tragfähig sein und sind bei der Gestaltung von Unterricht und Förderung zu berücksichtigen. Im vorliegenden Beitrag werden insbesondere Kommunikationsförderung und Verstehensorientierung genauer beleuchtet, die für den inklusiven Unterricht mitunter eine besondere Herausforderung darstellen.

Inhaltlich konkretisiert werden die Überlegungen am Beispiel des Stellenwertverständnisses, einer wichtigen Basiskompetenz im Mathematikunterricht – nicht nur – der Grundschule (vgl. z. B. Selter et al., 2014; SWK, 2022, S. 50). Dazu wird in den folgenden Abschnitten zunächst die Bedeutung des Stellenwertverständnisses herausgearbeitet, um im Anschluss das Projekt MaCo (Mathematik aufholen nach Corona; maco.dzlm.de) mit Materialien zur Förderung des Stellenwertverständnisses vorzustellen (Bertram et al., 2023a, b; Scherer et al., 2024). Erste Erprobungen mit ausgewählten MaCo-Materialien sowie zusammenfassende Überlegungen und Perspektiven folgen.

Zur Bedeutung des Stellenwertverständnisses

Ein sicheres Stellenwertverständnis ist essentiell für Zahlvorstellungen und insbesondere das Verständnis großer Zahlen sowie für die Entwicklung effektiver Rechenstrategien und das Verständnis der schriftlichen Algorithmen (vgl. z. B. Scherer, 2014; Winter, 2001). Auch die Bezüge zu Größen mit dezimalen, aber auch nicht-dezimalen Strukturen spielen eine zentrale Rolle, und auch über die Grundschule hinaus ist das Stellenwertverständnis für Zahlbereichserweiterungen von großer Bedeutung, d. h. das Prinzip der Durchgängigkeit spielt hier eine besondere Rolle. Insofern handelt es sich beim Stellenwertverständnis um eine zentrale Basiskompetenz, denn „ohne die für ein gesichertes Stellenverständnis im Zahlenraum bis 100 zu erreichenden basalen Kompetenzen (Verständnis des Prinzips der fortgesetzten Bündelung, Verständnis des Prinzips des Zahlenwerts und des Stellenwerts, Fähigkeit zur Darstellungsvernetzung) [wird] der Erwerb eines gesicherten Stellenwertverständnisses im Zahlenraum bis 1.000 genauso erschwert wie der Erwerb von Kompetenzen im additiven Rechnen im Zahlenraum bis 100“ (SWK, 2022, S. 50).

Die genannten Prinzipien, Bündelungsprinzip bzw. Prinzip der fortgesetzten Bündelung sowie das Positionsprinzip bzw. Stellenwertprinzip (vgl. z. B. Fromme, 2017; Scherer & Moser Opitz, 2010), werden nachfolgend genauer beleuchtet: Gemäß dem Prinzip der fortgesetzten Bündelung werden im Dezimalsystem auf der Grundlage der Basis Zehn immer zehn Elemente einer Einheit zu gleichmächtigen Teilmengen der nächstgrößeren Einheit zusammengefasst und zwar solange, bis keine weiteren Gruppen mehr gebildet werden können. Das Positionsprinzip ist mit dem Prinzip der fortgesetzten Bündelung verknüpft, wird aber als eigenständiges Prinzip betrachtet und bezieht sich auf die Notation der Bündelungsergebnisse in einer geordneten Ziffernfolge. Der Wert einer Ziffer wird durch die Position in der Zahl bestimmt. Dabei steht jede Ziffer für einen Stellenwert und gibt einerseits die Anzahl der jeweiligen Elemente in der Bündelungseinheit an (Zahlenwert der Ziffer) und liefert andererseits in Abhängigkeit der Position innerhalb der Zahl den spezifischen dekadischen Wert (Stellenwert der Ziffer).

Festgehalten wird zudem auch die Bedeutung des Teil-Ganzes-Prinzips (vgl. z. B. Häsel-Weide & Schöttler, 2021): Jede Menge kann als ein Ganzes aufgefasst werden, welches flexibel in verschiedene Teile zerlegt und aus Teilen wieder zusammengesetzt werden kann. Für das Verständnis des Stellenwertsystems ist die Zusammensetzung aus Stellenwerten als Vielfache von Zehnerpotenzen erforderlich.

Verschiedene Studien konnten zeigen, dass Schwierigkeiten im Bereich des Stellenwertsystems bzw. beim Verständnis der beiden grundlegenden Prinzipien (Bündelungsprinzip, Positionsprinzip) im 3. oder 4. Schuljahr der Grundschule, aber auch in höheren Klassenstufen auftreten (vgl. u. a. Fromme, 2017; Scherer, 2014). Jensen et al. (2024) konnten außerdem zeigen, dass Aufgaben, die das Verständnis beider Prinzipien erforderten, besondere Probleme auslösten.

Geeignete Lernangebote

Im Rahmen des Projekts MaCo wurden unterschiedliche Diagnose- und Fördermaterialien entwickelt, die Verstehensgrundlagen zu zentralen Basiskompetenzen im Mathematikunterricht, insbesondere aufgrund der durch die Corona-Pandemie verstärkten Lernrückstände der Kinder und Jugendlichen, fokussieren. Eines der 14 Module konzentriert sich auf das Stellenwertverständnis bei natürlichen Zahlen (maco.dzlm.de/node/54) und ermöglicht durch Unterrichtsmaterialien mit didaktischen Kommentaren, Erklärvideos für Lernende, Web-Apps sowie Informationen für Eltern/Erziehungsberechtigte verstehensorientierte Diagnose und Förderung von Bündelungs- und Positionsprinzip als zentrale Elemente des Stellenwertverständnisses bei natürlichen Zahlen. Vor allem die Unterrichtsmaterialien, Erklärvideos und Web-Apps nehmen dabei auch weitere zentrale Aspekte für ein tragfähiges Mathematiklernen in den Blick, wie beispielsweise die Vernetzung verschiedener Darstellungen, den Einsatz relevanter Arbeitsmittel und Veranschaulichungen oder auch den Bezug zu effizienten Rechenstrategien (z. B. Scherer & Moser Opitz, 2010). Dabei werden stets die Prinzipien Verstehensorientierung, kognitive Aktivierung und Lernendenorientierung für einen qualitätsvollen Mathematikunterricht berücksichtigt, indem nicht nur Routineaufgaben zu bewältigen sind, sondern die Bearbeitung wirkliches Verständnis erfordert (vgl. z. B. Scherer, 2014). Gerade die Gestaltung von Aufgaben, die etwa auf die Bedeutung einer Ziffer an verschiedenen Stellen in einer Zahl oder auf die verschiedenen Möglichkeiten des Bündelns und Entbündelns eingehen, konzentrieren sich auf die verstehensorientierte Förderung des Stellenwertverständnisses, die schließlich zentral für ein langfristig erfolgreiches Mathematiklernen ist.

Für die Gestaltung eines Mathematikunterrichts in heterogenen bzw. inklusiven Lerngruppen ist neben den bereits genannten Prinzipien besonders die Kommunikationsförderung zentral, da das gemeinsame Lernen aller Kinder besonders in den Fokus rückt (Häsel-Weide & Nührenbörger, 2017). Um die Chancen und Grenzen des MaCo-Materials vor dem Hintergrund der Kommunikationsförderung genauer zu betrachten und ggf. Möglichkeiten für Weiterentwicklungen bzw. Hinweise zum unterrichtlichen Einsatz auszuloten, wurden ausgewählte Aufgaben des Unterrichtsmaterials zum Stellenwertverständnis bei natürlichen Zahlen in Partnerinterviews erprobt und dabei insbesondere gemeinsame Lernsituationen in den Blick genommen. Bevor die Eckdaten und die Ergebnisse einer ersten Erprobung präsentiert werden, werden zunächst die eingesetzten Aufgaben genauer skizziert.

Die ausgewählten Aufgaben des Materials „Stellenwerte üben mit Mustern und Strukturen (Zahlen bis 1000)“ (Bertram et al., 2023a, b) umfassen zum einen das flexible Zählen und Zahlenfolgen (Aufgabe 1) und zum anderen Muster im Tausenderbuch, die fortzusetzen sind oder von den Schülerinnen und Schülern selbst zu kreieren sind (Aufgabe 2). Darüber hinaus behandelt Aufgabe 3 operative Veränderungen von Zahlen mit dem Dienes Material und in der Stellentafel (vgl. Bertram et al., 2023a, b), die aber in diesem Beitrag nicht weiter ausgeführt werden. Die Aufgabenstellungen im Material thematisieren vielfältige Zahlbeziehungen auf unterschiedlichen Repräsentationsebenen mit einem besonderen Fokus auf die Stellenwerte und Stellenwertübergänge, um Verstehensorientierung zu adressieren und zentrale Kompetenzen aufzubauen (vgl. Bertram et al., 2023b; Scherer et al., 2024). Bei den Aufgaben sollen die Schülerinnen und Schüler u. a. im Tandem arbeiten und ihre Ergebnisse und Vorgehensweise verbalisieren bzw. verschriftlichen. Insgesamt wird neben dem grundsätzlichen Verständnis des Dezimalsystems als wichtige Struktur die Umsetzung der Leitidee ‚Muster und Strukturen' durch verschiedene operative Übungen in besonderer Weise verfolgt.

Erprobt wurde einerseits Aufgabe 1.1 (Teilaufgaben a und b) zum flexiblen Zählen (Bertram et al., 2023a, b), bei der in verschiedenen Schrittlängen (2er-, 5er-, 10er- und 100er-Schritte) vorwärts und rückwärts mit Stellenwertübergängen gezählt und Auffälligkeiten beschrieben werden sollen. In Teilaufgabe c werden benachbarte Stellenwerte (Zehner, Hunderter, Tausender) in den Blick genommen, wobei wiederum operative Beziehungen zentral sind (Beispielaufgabe: „Stelle dir die Zahl 466 vor. Wie weit ist es bis zum nächsten Hunderter? Denke dir nun die Zahl 766. Wie weit ist es bis zum nächsten Hunderter?").

In Aufgabe 2.1 (Teilaufgabe a) sind zunächst durch Plättchen gelegte Muster auf einer ausgefüllten Zahlseite des Tausenderbuchs fortzusetzen (horizontal, vertikal oder diagonal; vgl. Abb. 1), um dann Gemeinsamkeiten und Unterschiede der entstehenden Zahlen zu beschreiben (vgl. Bertram et al., 2023a, b). Zum Beispiel ist die Zahlenfolge 402, 412, 422 und 432 gelegt (blaue Plättchen) und soll fortgesetzt werden, ebenso wie die Zahlenfolge 478, 477, 476 und 475 (grüne Plättchen). In Teilaufgabe d sind lückenhafte Zahlseiten gewählt, und die fehlenden Zahlen sind einzutragen. Auch hier repräsentieren die Lücken horizontale, vertikale oder diagonale Strukturen, und die Schülerinnen und Schüler sollen die jeweiligen Muster erklären.

Bei beiden Aufgabentypen ist das Verständnis des Positionsprinzips erforderlich bzw. wird mit oder ohne anschauliche Unterstützung in besonderer Weise gefördert. Das Bündelungsprinzip ist zwar nicht durch explizites Bündeln und Entbündeln gefordert (wie bspw. in Aufgabe 3), wird aber dennoch implizit beim Bearbeiten der Aufgaben umgesetzt (wenn etwa bei Aufgabe 2 über Veränderungen an bestimmten Stellenwerten reflektiert wird und Zahlen gedanklich in Stellenwerte zerlegt werden).

2.1 Wegemuster im Tausenderbuch

a) **Muster fortsetzen**
Lege die Plättchen auf die Startzahl und die weiteren Zahlen in der Aufgabe.
Beispiel: Ein blaues Plättchen wird auf die Startzahl 402 gelegt und weitere Plättchen auf die 412, 422 und 432.
Beantworte die Fragen:
Wie geht es weiter? ______________________________

Wie heißt deine Zielzahl? ______
Um wie viel verändern sich die Zahlen jeweils? ______

Beschreibe die Zahlen: Was ist gleich, was ist unterschiedlich?

____

____

401	402	403	404	405	406	407	408	409	410
411	412	413	414	415	416	417	418	419	420
421	422	423	424	425	426	427	428	429	430
431	432	433	434	435	436	437	438	439	440
441	442	443	444	445	446	447	448	449	450
451	452	453	454	455	456	457	458	459	460
461	462	463	464	465	466	467	468	469	470
471	472	473	474	475	476	477	478	479	480
481	482	483	484	485	486	487	488	489	490
491	492	493	494	495	496	497	498	499	500

Abb. 1: Aufgabe zu Wegen im Tausenderbuch (Bertram et al., 2023a, S. 9)

Ausgewählte Erprobungen

Für die Erprobung der zuvor skizzierten Aufgaben wurden vier Kinder in Partnerinterviews während der Bearbeitung der Aufgaben beobachtet und befragt (Strünkmann, 2023). Im Vordergrund steht dabei die Beantwortung der Forschungsfrage: „Inwiefern ermöglichen die Aufgaben ein gemeinsames Lernen der Schülerinnen und Schüler?“ Die Kinder sind zwischen neun und zehn Jahren alt, besuchen die vierte Klasse einer Grundschule und wurden von der entsprechenden Lehrerin als leistungsstark im Mathematikunterricht eingeschätzt. Wie die folgenden Ergebnisse von Strünkmann (2023) zeigen, eröffnet die gemeinsame Arbeit von je zwei Kindern an den Aufgaben, dass die Kinder über Mathematik sprechen und sich die Potenziale der Kinder hinsichtlich ihres Stellenwertverständnisses entfalten können.

In den Partnerinterviews können zunächst Situationen ausgemacht werden, in denen sich die Kinder beim flexiblen Zählen gegenseitig korrigieren. Bei einer Aufgabe zählt Kind A von 250 in Hunderterschritten weiter bis zu 1150 und lässt dabei die 550 aus, woraufhin Kind B beschreibt „Ja mir ist nur aufgefallen, dass du fünfhundertfünfzig vergessen hast." Die Aufgabe ist einerseits so angelegt, dass ein Stellenwertübergang von Hundertern zu Tausendern gefordert ist, adressiert durch die Wahl der Startzahl und der Schrittlänge aber zugleich auch die häufige Schwierigkeit, die hier bei einem Kind auftritt, nämlich das Auslassen von Zahlen, in denen die gleiche Ziffer mehrfach vorkommt. Bei einer weiteren Aufgabe zur Bestimmung des Abstandes zum größeren Nachbarhunderter von einer gegebenen Zahl (hier 55 und 555), sagt Kind A, „Hier sind das [...] fünfundfünfzig bis zum nächsten Hunderter". Nach einem kurzen Schweigen entsteht der Eindruck, als würde sich Kind A eine Bestätigung des Partnerkindes zu dieser Antwort wünschen, woraufhin Kind B antwortet „Warte. [*lehnt sich weiter über das Arbeitsblatt*] (...) fünfundvierzig?" und schließlich ergänzt, dass dann auch der Abstand von 555 bis zum nächsten Nachbarhunderter ebenfalls 45 beträgt. Die explizit vorgesehene gegenseitige Kontrolle bzw. Fehlerkorrektur kann auch hier vor dem Hintergrund der Kommunikationsförderung betrachtet werden. Zudem zeigt sich hier das Erkennen des gleichen Musters und das Potenzial operativer Übungen.

Ähnliche Situationen des Korrigierens von Fehlern sind auch in der gemeinsamen Bearbeitung der Aufgaben von anderen Kindern zu erkennen. Zum Beispiel lässt Kind C beim Zählen in 10er-Schritten von 34 bis 114 die Zahl 104 aus, merkt dann selbst an, dass dabei vielleicht ein Fehler unterlaufen sein könnte, woraufhin Kind D die Zahlen alle notiert und hierbei auch die 104 mit aufschreibt. Anschließend beschreiben die Kinder gemeinsam, dass der Einer der Zahlen immer 4 ist und, dass die Zehner immer um 1 größer werden, bis irgendwann auch die 100 überschritten wird. Beim Rückwärtszählen von 130 in 5er-Schritten lässt Kind D beim Notieren die Zahl 95 aus, woraufhin Kind C dem Partnerkind zuflüstert, dass es die 95 vergessen hat, und Kind D anschließend die Zahl ergänzt. Auch hier beschreiben die Kinder anschließend wieder gemeinsam, dass sie ein Muster von wechselnden Nullen und Fünfen an der Einerstelle entdeckt haben und dass bei zwei aufeinanderfolgenden Zahlen die Zehner identisch sind. Die Aufgabe zum Nachbarhunderter von 55 und 555 bearbeiten Kind C und D ohne Fehler und ergänzen sich bei der Beschreibung von Gemeinsamkeiten und Unterschieden. So beschreibt Kind D zunächst, dass in beiden Zahlen die 55 vorkommt und Kind C ergänzt, dass der Hunderter bei den beiden Zahlen unterschiedlich ist.

Ebenso korrigieren sich die Kinder gegenseitig bei den Aufgaben im Tausenderbuch, und es eröffnen sich verschiedene Möglichkeiten der Zusammenarbeit. Zunächst bestimmt Kind D eine Zielzahl bei der Fortsetzung des Plättchenmusters auf der 400er-Seite des Tausenderbuchs falsch, da die in der Aufgabenstellung beschriebene Dynamik des Plättchenlegens außer Acht gelassen wird und es somit zu einer Verwechslung von Vorwärts- und Rückwärtszählen kommt (siehe Zahlenfolge mit grünen Plättchen in Abb. 1). Kind C erklärt daraufhin, wie die Plättchen gelegt werden und wie dem Muster des Rückwärtszählens folgend dann die korrekte Zielzahl lauten müsste. So regt die gemeinsame Bearbeitung der Aufgaben nicht nur eine Fehlerkorrektur, sondern auch das gegenseitige Erklären und damit einhergehend die entsprechende Verbalisierung von Mustern und Strukturen an. Zugleich wird hier eine Mehrdeutigkeit des Materials deutlich, denn die gelegten grünen Plättchen (Abb. 1) markieren noch nicht den Anfangspunkt der Zahlenfolge. Die Kinder müssen zunächst die gegebenen Beschreibungen des Plättchenlegens nachvollziehen und für die Fortsetzung der dazugehörigen Zahlenfolgen interpretieren. Außerdem ergänzen sich die beiden Kinder bei der Beschreibung des Musters mit den Plättchen auf einer Diagonalen von links oben nach rechts unten. Während Kind C auf die Beschreibung zurückgreift, dass sowohl der Zehner als auch der Einer um 1 erhöht werden, fasst Kind D dies zusammen als „das sind immer plus elf".

Bei den Aufgaben im Tausenderbuch zur Erstellung eigener Muster wird eine Zusammenarbeit außerdem dadurch angeregt, dass je ein Kind ein Muster mit Plättchen anfängt und dies vom Partnerkind fortgesetzt und die entsprechende Veränderung beschrieben werden soll. So bearbeiten Kind A und B zunächst gemeinsam die Aufgabe, verschiedene Muster mit den Plättchen auf der 400er-Seite im Tausenderbuch nachzulegen und fortzusetzen. Daraufhin legt Kind B beispielsweise die Plättchen auf die Zahlen 410, 419, 428 und 437. Kind A setzt die Diagonale fort und erklärt auf Nachfrage der Interviewerin, dass es immer 9 mehr werden. Anschließend legt Kind A Plättchen auf die Zahlen 491, 492, 493 und 494. Kind B setzt die Zahlenfolge ebenfalls fort und beschreibt anschließend zusätzlich, dass der Hunderter der Zahlen gleich bleibt.

Fazit

Im vorliegenden Beitrag wurden Erprobungen zu ausgewählten Aufgaben aus dem Projekt MaCo (Mathematik aufholen nach Corona) vorgestellt.

Die Ergebnisse verdeutlichen, dass die intendierte Verstehensorientierung bei der Konstruktion der Aufgaben mit Anforderungen auf unterschiedlichen Repräsentationsebenen einerseits den Lernenden vielfältige

Möglichkeiten eröffnet, ihre Kompetenzen zu zeigen und zu erweitern. Durch vielfältige operative Beziehungen in den Aufgaben konnte die zentrale Leitidee ‚Muster und Strukturen' wichtige Einsichten ins Stellenwertsystem ermöglichen. Diese Einsichten zielen auf langfristiges Lernen ab und können über das Stellenwertverständnis bei natürlichen Zahlen hinaus tragfähig für die Erweiterung von Zahlbereichen sein und damit das wichtige Prinzip der Durchgängigkeit einlösen. Die eingesetzten Aufgaben ermöglichen es somit, zentrale Aspekte des Stellenwertverständnisses zu fördern und bieten damit die Möglichkeit, eine wichtige Basiskompetenz im Mathematikunterricht zu adressieren.

Andererseits wurden in den Erprobungen auch Schwierigkeiten bei leistungsstärkeren Schülerinnen und Schülern offensichtlich, da keine Standard- bzw. Routineaufgaben gelöst werden sollen (bspw. werden explizit Stellenwertübergänge beim Zählen gefordert; vgl. auch Scherer, 2014). Auftretende Fehler wurden teilweise erst durch den Austausch mit dem Partnerkind erkannt und korrigiert, d. h. die bewusste Umsetzung der Kommunikationsförderung konnte hier zu produktiven Lernprozessen beitragen. Denkt man an die Erweiterung des Settings auf kleinere Lerngruppen oder die gesamte Klasse, dann eignen sich diese Materialien für die Umsetzung gemeinsamer Lernsituationen im inklusiven Mathematikunterricht.

Generell konnte das geforderte Beschreiben und Begründen von Vorgehensweisen und Entdeckungen – ob individuell oder im Austausch – auch die prozessbezogenen Kompetenzen umsetzen und dem Ziel der Sprachförderung im Mathematikunterricht Rechnung tragen. Im Rückblick auf die in diesem Beitrag fokussierte Fragestellung, kann somit festgehalten werden, dass die eingesetzten Aufgaben vielfältige Möglichkeiten für ein gemeinsames Lernen der Schülerinnen und Schüler bieten.

In den Erprobungen zeigte sich außerdem, dass die Interviewerin an einigen Stellen insbesondere an die Verbalisierung der Entdeckungen erinnern und mündliche Erklärungen zusätzlich einfordern musste. Diese Einsicht stützt einerseits die zentrale Rolle der Lehrkraft beim Mathematiklernen der Schülerinnen und Schüler, zeigt andererseits aber auch Grenzen des Materials auf, wenn es darum geht, Aktivitäten in der gesamten Klasse mit dem Ziel der Kommunikationsförderung durchzuführen. Doch insbesondere die erfolgte gegenseitige Fehlerkontrolle und die verstehensorientierte Gestaltung der Aufgaben liefern Anlässe für erfolgreiches Mathematiklernen über die Interviewsituation in Schülerpaaren hinaus. Zukünftige Erprobungen könnten neben entsprechenden anderen Settings auch die weiteren Aufgaben des Unterrichtsmaterials sowie deren Verbindung mit beispielsweise den Web-Apps und Erklärvideos aufgreifen und so weitere Chancen und Herausforderungen bei der Diagnose und Förderung des Stellenwertverständnisses in einem verstehensorientierten und kommunikationsförderlichen Mathematikunterricht fokussieren.

Literaturverzeichnis

Bertram, J., Kaya, M., & Scherer, P. (2023a). *Stellenwerte üben mit Mustern und Strukturen (Zahlen bis 1000).* Open Educational Resources. https://maco.dzlm.de/node/54.

Bertram, J., Kaya, M., & Scherer, P. (2023b). *Didaktischer Kommentar zum Unterrichtsmaterial. Stellenwerte üben mit Mustern und Strukturen (Zahlen bis 1000).* Open Educational Resources. https://maco.dzlm.de/node/54.

Fromme, M. (2017). *Stellenwertverständnis im Zahlenraum bis 100. Theoretische und empirische Analysen.* Springer. https://doi.org/10.1007/978-3-658-14775-4.

Häsel-Weide, U., & Nührenbörger, M. (2017). Grundzüge des inklusiven Mathematikunterrichts. Mit allen Kindern rechnen. In U. Häsel-Weide & M. Nührenbörger (Hrsg.), *Gemeinsam Mathematik lernen – mit allen Kindern rechnen* (S. 8-21). Arbeitskreis Grundschule.

Häsel-Weide, U., & Nührenbörger, M. (2025). Unterrichtsintegrierte Förderung von mathematischen Basiskompetenzen. Empirische Rekonstruktion interferierender Praktiken der Förderung im Mathematikunterricht der Grundschule. *Zeitschrift für Grundschulforschung, 18,* 49-66. https://doi.org/10.1007/s42278-025-00223-x.

Häsel-Weide, U., & Schöttler, C. (2021). Das Dezimalsystem verstehen – Bedeutung, Erkenntnisse, Anregungen. *Zeitschrift für Mathematikdidaktik in Forschung und Praxis, 2.* https://doi.org/10.48648/8qae-mb28.

Holzäpfel, L., Prediger, S., Götze, D., Rösken-Winter, B., & Selter, C. (2024). Qualitätsvoll Mathematik unterrichten: Fünf Prinzipien. *mathematik lehren,* (242), 2-8.

Jensen, S., Gasteiger, H., & Bruns, J. (2024). Place Value and Regrouping as Helpful Constructs to Diagnose Difficulties in Understanding the Place Value System. *Journal für Mathematik-Didaktik, 45*(2), 11 https://doi.org/10.1007/s13138-024-00234-8.

KMK – Sekretariat der Ständigen Konferenz der Kultusminister der Länder in der Bundesrepublik Deutschland (Hrsg.). (2022). *Bildungsstandards für das Fach Mathematik Primarbereich (Beschluss vom 15.10.2004 i.d.F. vom 23.06.2022).* https://www.kmk.org/fileadmin/Dateien/veroeffentlichungen_beschluesse/2022/2022_06_23-Bista-Primarbereich-Mathe.pdf.

Scherer, P. (2014). Low Achievers' Understanding of Place Value – Materials, Representations and Consequences for Instruction. In T. Wassong, D. Frischemeier, P. R. Fischer, R. Hochmuth, & P. Bender (Hrsg.), *Mit Werkzeugen Mathematik und Stochastik lernen – Using Tools for Learning Mathematics and Statistics* (S. 43-56). Springer. https://doi.org/10.1007/978-3-658-03104-6.

Scherer, P., & Moser Opitz, E. (2010). *Fördern im Mathematikunterricht der Primarstufe.* Spektrum.

Scherer, P., Rolka, K., Bertram, J., & da Costa Silva, N. (2024). Fostering Basic Mathematical Competencies: Concepts and Materials for Teachers and Students for Understanding Place Value in Inclusive Settings. In F. Altınay & Z. Altınay (Hrsg.), *Intellectual and Learning Disabilities – Inclusiveness and Contemporary Teaching Environments* (S. 45-62). Intech Open. https://doi.org/http://dx.doi.org/10.5772/intechopen.113257.

Schwippert, K., Kasper, D., Eickelmann, B., Goldhammer, F., Köller, O., Selter, C., & Steffensky, M. (Hrsg.). (2024). *TIMSS 2023. Mathematische und naturwissenschaftliche Kompetenzen von Grundschulkindern in Deutschland im internationalen Vergleich.* Waxmann. https://doi.org10.31244/9783830999591.

Selter, C., Prediger, S., Nührenbörger, M., & Hußmann, S. (Hrsg.) (2014). *Mathe sicher können – Natürliche Zahlen. Förderbausteine und Handreichungen für ein Diagnose- und Förderkonzept zur Sicherung mathematischer Basiskompetenzen.* Cornelsen.

Ständige Wissenschaftliche Kommission der Kultusministerkonferenz (SWK) (2022). *Basale Kompetenzen vermitteln – Bildungschancen sichern. Perspektiven für die Grundschule. Gutachten der Ständigen Wissenschaftlichen Kommission der Kultusministerkonferenz (SWK).* https://doi.org/10.25656/01:25542.

Stanat, P., Schipolowski, S., Schneider, R., Sachse, K. A., Weirich, S., & Henschel, S. (Hrsg.). (2022). *IQB-Bildungstrend 2021. Kompetenzen in den Fächern Deutsch und Mathematik am Ende der 4. Jahrgangsstufe im dritten Ländervergleich.* Waxmann. https://doi.org/10.31244/9783830996064.

Strünkmann, F. (2023). *Diagnose des Stellenwertverständnisses bei natürlichen Zahlen mit Materialien aus dem Projekt „Mathematik aufholen nach Corona". Erprobung der Aufgaben in einer gemeinsamen Lernsituation mit Kindern einer 4. Klasse.* Unveröffentlichte Bachelorarbeit. Universität Duisburg-Essen.

Winter, H. (2001). *Inhalte mathematischen Lernens.* https://grundschule.bildung-rp.de/fileadmin/user_upload/grundschule.bildung-rp.de/Downloads/Mathemathik/Winter_Inhalte_math_Lernens.pdf.

Zum Einfluss der Zahlwortbildung auf das Stellenwertverständnis

Eine Vergleichsstudie mit deutschen und dänischen Zweitklässler:innen

Thomas Rottmann & Mia Lene Ransiek

Abstract

Ein sicheres Stellenwertverständnis ist eine der zentralen mathematischen Basiskompetenzen in der Grundschule und zeigt sich u.a. in der Fähigkeit, sicher zwischen verschiedenen Darstellungen einer Zahl als (gesprochenes) Zahlwort, als Zahlzeichen und als Mengendarstellung wechseln zu können. Während Zahlzeichen und Mengendarstellung unabhängig von der Sprache sind, gibt es deutliche Unterschiede in der Bildung der Zahlwörter in unterschiedlichen Sprachen. Eine Besonderheit sowohl im Deutschen als auch im Dänischen besteht in der inversen Zahlwortbildung; bei zweistelligen Zahlen über 20 werden zuerst die Einer und anschließend die Zehner genannt. Diese explorative Studie vergleicht die Fähigkeiten und Schwierigkeiten von Zweitklässler:innen aus je zwei Schulen in Deutschland (n=96) und Dänemark (n=84) bei Aufgaben zu Darstellungswechseln. Die deutschen Schüler:innen erreichen signifikant mehr Punkte in einem schriftlichen Test als die dänischen Schüler:innen. Eine genauere Fehleranalyse zeigt Unterschiede zwischen den beiden Ländern, welche in einem Zusammenhang mit spezifischen Merkmalen der Zahlwortbildung in der jeweiligen Sprache stehen.

Zahlverständnis, Stellenwertverständnis, inverse Zahlwortbildung, Ländervergleich

Einleitung

Ein sicheres Stellenwertverständnis stellt eine wichtige Grundlage für die Entwicklung weiterer arithmetischer Kompetenzen dar. So haben bereits Carpenter et al. (1998) gezeigt, dass es eine Beziehung zwischen dem Stellenwertverständnis und der Erfolgsquote bei Additions- und Subtraktionsaufgaben mit mehrstelligen Zahlen gibt. Andere Studien weisen nach, dass das Stellenwertverständnis ein wichtiger Prädiktor für die spätere arithmetische Leistung sowohl in der Grundschule (Moeller et al., 2011) als auch in der weiterführenden Schule (Moser Opitz, 2007) ist.

Damit kann ein entwickeltes Stellenwertverständnis als eine der zentralen mathematischen Basiskompetenzen (Sale, 2019) bzw. der basalen mathematischen Kompetenzen (SWK, 2022) in der Grundschule angesehen werden. Es bildet eine wichtige Verstehensgrundlage, „ohne die ein erfolgreiches, nachhaltig verständiges und weiterführendes Mathematiklernen im Mathematikunterricht nicht möglich ist“ (SWK, 2022, S. 50). Entsprechend gilt ein unzureichend entwickeltes Stellenwertverständnis als eines der Hauptanzeichen für besondere Schwierigkeiten beim Rechnenlernen (Gaidoschik et al., 2021; Rottmann & Peter-Koop, 2015). Folglich berücksichtigen viele Instrumente zur Diagnose arithmetischer Kompetenzen im Grundschulalter das Stellenwertverständnis. Exemplarisch sei hier das ElementarMathematische BasisInterview (EMBI; Peter-Koop et al., 2007 bzw. Flottmann et al., 2021) genannt, in welchem das Stellenwertverständnis als einer von vier zentralen Kompetenzbereichen betrachtet wird.

Das dezimale Stellenwertsystem ist durch zwei grundlegende Prinzipien gekennzeichnet, nämlich durch (1) das Bündelungsprinzip (oder auch Prinzip der fortgesetzten Bündelung) und (2) das Stellenwertprinzip. Dabei beschreibt das Bündelungsprinzip, dass immer die gleiche Anzahl von Einheiten (im Dezimalsystem jeweils zehn) wiederholend gebündelt wird. Das Stellenwertprinzip besagt, dass die Position der Ziffer die Mächtigkeit der Bündel angibt (Jensen et al., 2024; Fromme, 2017). Die sichere Kenntnis dieser Prinzipien ist zentral für ein entwickeltes Stellenwertverständnis.

Darüber hinaus wird besonders die Fähigkeit, flexibel zwischen verschiedenen Darstellungen von mehrstelligen Zahlen (als Zahlzeichen mit symbolischer Zifferndarstellung, als (gesprochenes) Zahlwort und als Menge, z.B. mit Zehnersystemblöcken; vgl. Abbildung 1) wechseln zu können, als wichtiges Anzeichen für ein gesichertes Stellenwertverständnis angesehen (Fromme, 2017; van de Walle et al., 2023). Aufgaben, die entsprechende Übersetzungsprozesse zwischen diesen Darstellungen erfordern, können somit auch zur Diagnose verwendet werden, um das Stellenwertverständnis von Schüler:innen zu beurteilen. Der sichere Umgang mit den unterschiedlichen Darstellungen erfordert dabei unterschiedliche Fähigkeiten. Für das Schreiben und Lesen einer symbolischen Zifferndarstellung ist es wichtig zu verstehen, dass die Position einer Ziffer ihren Wert bestimmt (Fromme, 2017; Jensen et al., 2024). Für Übersetzungen zu oder ausgehend von gesprochenen Zahlwörtern ist es hingegen zentral, die Prinzipien und Regeln zu kennen, die der Bildung der Zahlwörter in der jeweiligen Sprache zugrunde liegen.

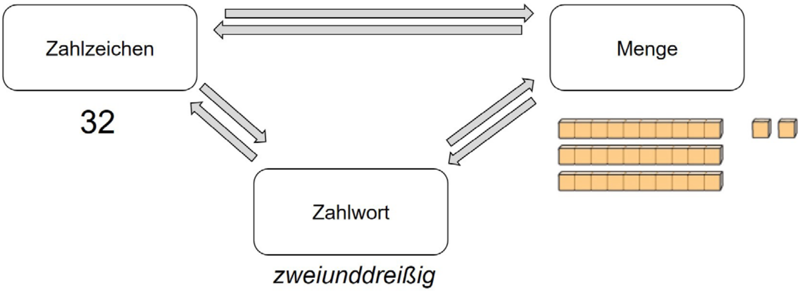


Abb. 1: Darstellungen von (mehrstelligen) Zahlen und Übersetzungen zwischen den Darstellungen

Besonderheiten bei der Zahlwortbildung

Im Gegensatz zu den Darstellungen als Zahlzeichen und als Menge unterscheidet sich die Bildung der Zahlwörter in verschiedenen Sprachen stark voneinander. Im Japanischen, wie in den meisten asiatischen Sprachen, haben die gesprochenen Zahlwörter eine sehr regelmäßige Struktur und benennen direkt den Stellenwert (32 ist „drei zehn zwei“). Im Gegensatz dazu weisen die meisten europäischen Sprachen eine gewisse Unregelmäßigkeit in den Zahlwörtern auf und verwenden andere Namen für die Zehner als für die Einer (Fromme, 2017). Beispiele dafür sind im Englischen „thirty“ statt „threety“ und im Deutschen „siebzig“ statt „siebenzig“.

In anderen europäischen Sprachen fußen zumindest einige Zahlwörter für die Zehner auf Überbleibseln eines Zwanzigersystems; z.B. lautet das französische Zahlwort für 80 „quatre-vingts“, was „vier (quatre) mal zwanzig (vingt)“ bedeutet. Die dänischen Zahlwörter für die Zehner fallen durch einen besonders hohen Grad an Unregelmäßigkeiten auf. So unterscheidet sich z.B. das Zahlwort für 4 („fire”) deutlich vom Zahlwort für 40 („fyrre“) und besitzt stattdessen eine deutliche Ähnlichkeit zum Zahlwort für 80 („firs“). In diesem Zahlwort „firs“ versteckt sich zudem ebenfalls, ähnlich wie im Französischen, die Basis 20 („vier mal zwanzig“), mit der zusätzlichen Besonderheit, dass „zwanzig“ nicht als Bestandteil des Zahlworts erkennbar ist. Ähnliches gilt für das Zahlwort für 70 („halvfjerds“): Bei dieser Zahl wird die Vorsilbe „halv“ („halb“) ähnlich genutzt wie bei den deutschen Uhrzeiten (z.B. „halb vier“ für „eine halbe Stunde vor vier Uhr“). „Halvfjerds“ bedeutet entsprechend „ein halbes Mal 20 weniger als viermal 20“. Den meisten dänischen Schüler:innen sind die Herkunft der Zahlwörter und die darin enthaltenen Aufbauprinzipien nicht bewusst, so dass die Zahlwörter für die Zehner auswendig gelernt werden müssen und dabei kein

Rückbezug zu den Zahlwörtern für die Einer genutzt werden kann (Ejersbo & Misfeldt, 2015).

Eine weitere Besonderheit ist die inverse Zahlwortbildung. Während im Englischen die Zehner und Einer nacheinander, beginnend mit dem höchsten Stellenwert, genannt werden (z.B. 32: „thirty-two"), wird sowohl in der dänischen als auch in der deutschen Sprache die Reihenfolge der Zehner und Einer im gesprochenen Zahlwort getauscht. Die Zahlen werden invers gesprochen, beginnend mit den Einern (z.B. „zwei-und-dreißig" auf Deutsch bzw. „to-og-tredive" auf Dänisch). Zusätzlich wird die Silbe „und" bzw. „og" verwendet, um die Zahlwörter für die Einer und Zehner zu verbinden.

Mehrere Studien haben bereits den Einfluss der (verbalen) Zahlwortbildung auf die Zahlverarbeitung und die Entwicklung des Stellenwertverständnisses untersucht. Im Allgemeinen zeigen sich Vorteile einer regelmäßigen Zahlwortbildung, wie sie insbesondere in asiatischen Sprachen verwendet wird. Die meisten Untersuchungen in diesem Bereich befassen sich mit Englisch und/oder asiatischen Sprachen (Habermann et al., 2020; Hewitt & Alajmi, 2023). Einige Studien betrachten jedoch auch gezielt Sprachen mit inverser Zahlwortbildung, vor allem Deutsch (Clayton et al., 2020; Moeller et al., 2011; Steiner et. al., 2021). Die inverse Zahlwortbildung zeigt dabei deutliche Nachteile in Bezug auf die Entwicklung des Stellenwertverständnisses wie auch auf weitere mathematische Kompetenzen. Als typischer Fehler treten Zahlendreher auf (z.B. 35 statt 53); dieser Fehler unterläuft deutschsprachigen Schüler:innen signifikant häufiger als englischsprachigen (Clayton et al., 2020). Als Ergebnis ihres Literaturreviews fassen Larkin et al. (2024) zusammen:

> „In particular we see that both the transparency of the language, as well as the alignment between the order of writing the digits and the order of naming the numbers, contributes to opportunities or difficulties in learning place value" (S. 107).

Bisher wurde allerdings noch nicht im Detail untersucht, welche genaue Rolle die inverse Zahlwortbildung spielt und ob es noch andere Einflussfaktoren auf die Entstehung von Fehlern wie dem Zahlendreher gibt. Bisherige Studien vergleichen meist Sprachen mit und ohne inverser Zahlwortbildung, jedoch nicht zwei (oder mehr) Sprachen, die alle eine inverse Zahlwortbildung nutzen.

Forschungsinteresse und Design der Studie

In unserer Studie vergleichen wir die Fähigkeiten deutscher und dänischer Zweitklässler:innen bei Aufgaben zum Darstellungswechsel zwischen Zahlzeichen, Zahlwort und Mengendarstellung bei zweistelligen Zahlen.

Diese beiden Sprachen bieten sich besonders für einen Vergleich an, da zwar beide Sprachen eine inverse Zahlwortbildung nutzen, sich der Aufbau der Zahlwörter für die Zehner aber grundlegend unterscheidet. Wir interessieren uns insbesondere für die Schwierigkeiten und Fehler der Schüler:innen beim Darstellungswechsel; ein besonderes Augenmerk bei den Analysen liegt auf dem Auftreten von Zahlendrehern sowie von Fehlern, die in einem Zusammenhang mit den Besonderheiten bei den Zahlenwörtern für die Zehner stehen. Die zentralen Forschungsfragen sind:

1. Welche Schwierigkeiten und Fehlertypen sind in den Übersetzungsprozessen zu erkennen?
2. Inwiefern zeigen sich Unterschiede zwischen den deutschen (GER) und den dänischen (DK) Schüler:innen in dieser Studie?

Unsere Studie hat explorativen Charakter, um erste Hinweise darauf zu erhalten, inwiefern es Unterschiede zwischen den beiden Ländern gibt und ob sich weitere Untersuchungen in diesem Bereich lohnen könnten. Die vorliegende Studie erhebt keineswegs den Anspruch auf Repräsentativität. Um aber eine gewisse Breite abzubilden, haben wir pro Land jeweils eine Schule in einem städtischen und in einem ländlichen Umfeld ausgewählt. Insgesamt nahmen 96 deutsche und 84 dänische Zweitklässler:innen an der Datenerhebung im Herbst 2023 teil. Zur Datenerhebung wurde ein schriftlicher Test entwickelt, welcher ausschließlich Übersetzungsprozesse zwischen den drei Darstellungen von Zahlen (als gesprochene Zahlwörter, Zahlzeichen und Mengen) überprüft. Für die Mengendarstellung wurde eine ikonische Darstellung der Zehnersystemblöcke verwendet (vgl. Abbildung 2), damit die Schüler:innen im schriftlichen Test selbst Materialdarstellungen erstellen konnten. Weitere Aspekte des Stellenwertverständnisses wurden im Rahmen dieser explorativen Studie ausgespart. Nach der Einführung in die Aufgabenstellung und in die verwendeten Darstellungen bearbeiteten die Schüler:innen insgesamt 25 Aufgaben zu vier verschiedenen Übersetzungsprozessen (dunkle Pfeile in Abbildung 2): (1) vom Zahlwort zum Zahlzeichen (10 Aufgaben), (2) vom Zahlwort zur Menge (5 Aufgaben), (3) von der Menge zum Zahlzeichen (5 Aufgaben) und (4) vom Zahlzeichen zur Menge (5 Aufgaben). Dabei wurden die Zahlwörter mündlich von der Lehrkraft in deutscher bzw. dänischer Sprache genannt, die Schüler:innen wurden gebeten, die Zahlen aufzuschreiben oder auf ein vorstrukturiertes Blatt zu zeichnen. Die beiden Übersetzungen zu einem (gesprochenen) Zahlwort wurden, wegen fehlender Umsetzungsmöglichkeiten in einem schriftlichen Test, nicht berücksichtigt. Die Datenanalyse umfasst einen quantitativen Vergleich der Lösungs- und Fehlerquoten in den beiden Ländergruppen sowie weitere Fehleranalysen.

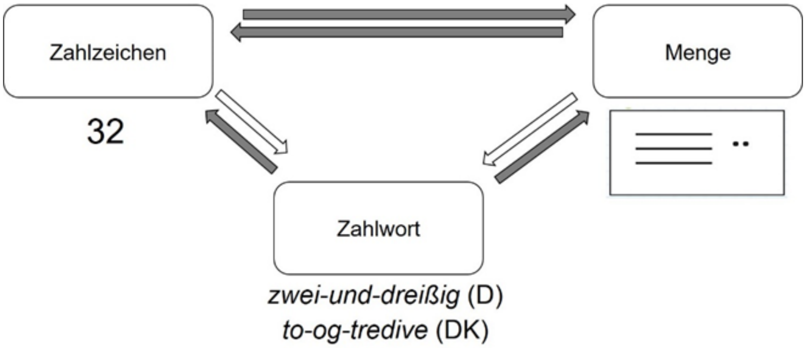


Abb. 2: Relevante Übersetzungen im schriftlichen Test

Ergebnisse

Insgesamt ist der Test (mit einer maximalen Punktzahl von 25) durch die Beschränkung auf die beschriebenen Übersetzungsprozesse recht einfach, was zu Deckeneffekten führt. Die Schüler:innen in beiden Ländergruppen bearbeiten die überwiegende Anzahl an Aufgaben korrekt. Dabei erzielen die deutschen Schüler:innen (GER: n=96; M=23.35; SD=2.82) höhere Werte als die dänischen Schüler:innen (DK: n=84; M=22.32; SD=3.53). Für den Gruppenvergleich wurde aufgrund der fehlenden Normalverteilung (Kolmogorov Smirnov p<.001) der nicht-parametrische Mann-Whitney-U-Test verwendet. Es zeigen sich statistisch signifikante Unterschiede zwischen den beiden Gruppen (GER: Mdn=24.00, Spannweite=16; DK: Mdn=24.00, Spannweite=14), U=3260.0, p<.05, r=.17.

Betrachtet man die einzelnen Übersetzungsprozesse, so lassen sich deutliche Unterschiede im Schwierigkeitsgrad erkennen. In beiden Ländergruppen treten die wenigsten Fehler bei der Übersetzung vom Zahlwort zum Zahlzeichen auf (Fehler in 5,1 % der jeweiligen Übersetzungsprozesse in der deutschen bzw. 6,1 % in der dänischen Gruppe) und die meisten Fehler bei der Übersetzung vom Zahlwort zur Mengendarstellung (Fehler: 10,8 % in der deutschen bzw. 13,8 % in der dänischen Gruppe; Tabelle 1).

	GER	DK
Zahlwort → Zahlzeichen	5,1%	6,1%
Zahlwort → Menge	10,8%	13,8%
Menge → Zahlzeichen	5,6%	13,3%
Zahlzeichen → Menge	7,3%	12,6%

Tabelle 1: Prozentualer Anteil der Fehler in den jeweiligen Übersetzungsprozessen

Interessant ist hier eine genauere Fehleranalyse. Im Rahmen dieses Beitrags betrachten wir zwei Fehlertypen genauer, nämlich *Zahlendreher* und *Fehler mit falschen Zehnerzahlen*. In unserer Studie treten *Zahlendreher* bei deutschen Schüler:innen häufiger auf (Anzahl der Zahlendreher in den 25 Aufgaben: M=0,93; SD=2.31) als bei dänischen Schüler:innen (M=0,23; SD=0.64), wobei der Unterschied allerdings nicht signifikant ist (GER: Mdn=.00, Spannweite=13; DK: Mdn=.00, Spannweite=3), U=3645.0, p=.83. Insgesamt sind Zahlendreher die häufigste Fehlerart der deutschen Kinder (in 3,7 % der Aufgaben, was 54,4 % der gesamten Fehler entspricht; Tabelle 2). Dieser Fehler ist besonders relevant bei Übersetzungen, die vom gesprochenen Zahlwort ausgehen. Den dänischen Schüler:innen hingegen unterläuft dieser Fehler äußerst selten (in 0,9% der Aufgaben, entsprechend 8,7 % der gesamten Fehler), obwohl auch in der dänischen Sprache eine inverse Zahlwortbildung verwendet wird.

	GER	DK
Zahlendreher insgesamt	3,7%	0,9%
Zahlwort → Zahlzeichen	4,9%	1,1%
Zahlwort → Menge	6,3%	0,7%
Menge → Zahlzeichen	0,6%	1,0%
Zahlzeichen → Menge	1,9%	0,7%

Tabelle 2: Prozentualer Anteil der Zahlendreher insgesamt sowie in den jeweiligen Übersetzungsprozessen

Von Interesse ist ein Blick auf die Verteilung dieses Fehlers. Den meisten Schüler:innen in beiden Ländern (80,2 % in GER und 88,1 % in DK; Tabelle 3) unterläuft dieser Fehler in keiner der Aufgaben. Im Gegensatz zu den dänischen Schüler:innen gibt es in Deutschland jedoch einen relativ hohen Anteil an Schüler:innen (9,4 % in GER vs. 1,2 % in DK), die diesen Fehler häufig machen (in mehr als 10 % der Aufgaben).

	GER (n=96)	DK (n=84)
0%	80,2%	88,1%
> 0% - 10%	10,4%	10,7%
> 10%	9,4%	1,2%

Tabelle 3: Häufigkeit der Zahlendreher bei einzelnen Schüler:innen

Aufgrund des hohen Maßes an Unregelmäßigkeiten in den dänischen Zahlwörtern berücksichtigen wir als zweiten Fehlertyp *Fehler mit falschen Zehnerzahlen.* Diese Kategorie betrifft Antworten mit der richtigen Anzahl an Einern, aber einer falschen Anzahl an Zehnern. Insgesamt gibt es zwar nur wenige Fehler in dieser Kategorie, diese treten aber fast ausschließlich bei den dänischen Schüler:innen auf (Fehler in 1,1 % der Aufgaben in der dänischen bzw. 0,1 % in der deutschen Gruppe). Einige der Fehler deuten auf ein falsches Zählen der Zehner in der ikonischen Darstellung hin, da das Ergebnis um 1 vom richtigen Ergebnis abweicht. Die meisten Fehler in dieser Kategorie treten jedoch bei den Übersetzungen ausgehend von den gesprochenen dänischen Zahlwörtern auf. Dies könnte auf die spezifischen Unregelmäßigkeiten dieser Sprache zurückzuführen sein.

Abbildung 3 zeigt zwei Beispiele für Fehler, die in engem Zusammenhang mit den Besonderheiten der dänischen Zahlwörter für die Zehner stehen. Bei dem vorgegebenen gesprochenen Zahlwort „**tre-og-tres**" (63; übersetzt: „drei und drei (mal zwanzig)") im ersten Beispiel zeigt das dänische Zahlwort „tres" für 60 eine starke Übereinstimmung mit dem Zahlwort „tre" für drei. Diese Ähnlichkeit könnte die Ursache dafür sein, dass die Schüler:in die Ziffer 3 sowohl an die Einer- als auch an die Zehnerstelle setzt und somit fälschlich 33 (im Dänischen eigentlich „tre- og-tredive") notiert.

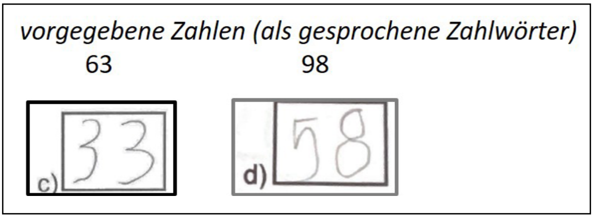


Abb. 3: Beispiele für „falsche Zehnerzahlen“

Das zweite Beispiel zeigt einen ähnlichen Fehler. Das vorgegebene gesprochene Zahlwort **„otte-og-halvfems“** (98) wird von der Schüler:in fälschlicherweise als 58 geschrieben (im Dänischen eigentlich „otte-og-halvtreds“). „Fem“ ist das dänische Zahlwort für fünf und gleichzeitig Bestandteil des Zahlworts „fems“. Dies könnte die Begründung dafür sein, dass für die Zehner fehlerhaft die Ziffer 5 notiert wird.

Diskussion und Ausblick

Ziel unserer Studie war es, die Fähigkeiten und Schwierigkeiten deutscher und dänischer Zweitklässler:innen bei Übersetzungsprozessen zwischen verschiedenen Darstellungen zweistelliger Zahlen zu vergleichen und die aufgetretenen Fehler zu analysieren. Damit sollen Einblicke in das Stellenwertverständnis als eine der zentralen mathematischen Basiskompetenzen in der Grundschule gewonnen werden. Dabei kann diese explorative Studie keine repräsentativen Ergebnisse liefern. Dennoch deuten unsere Ergebnisse auf sprachbezogene Unterschiede zwischen den beiden Ländern hin. Trotz der insgesamt sehr hohen Lösungsquote gibt es zwischen den beiden Ländergruppen statistisch signifikante Unterschiede. Die dänischen Schüler:innen machen im Durchschnitt mehr Fehler als die deutschen. Eine genauere Fehleranalyse zeigt ebenfalls Unterschiede zwischen den beiden Gruppen. Bei den deutschen Schüler:innen dominieren Zahlendreher als hauptsächlicher Fehlertyp (mit einem Anteil von 54,4 % aller Fehler). Dieser Befund deckt sich mit den Ergebnissen von Clayton et al. (2020).

Obwohl auch im Dänischen eine inverse Zahlwortbildung genutzt wird, spielen Zahlendreher bei den dänischen Schüler:innen in unserer Studie keine vergleichbare Rolle (mit einem Anteil von 8,7 % aller Fehler). Dies ist vor allem deshalb interessant, weil die Ursache für Zahlendreher im Deutschen vorwiegend in der inversen Zahlwortbildung gesehen wird (Clayton et al., 2020). Anscheinend spielen jedoch noch andere Aspekte der Zahlwortbildung eine wichtige Rolle bei der Entstehung dieses Fehlers. Eine mögliche Erklärung für die deutlich selteneren Zahlendreher in der Gruppe der dänischen Schüler:innen könnte in den Besonderheiten der Zahlwörter für die Zehner liegen. Während im Deutschen z. B. zwischen „fünf-und-vierzig“ und „vier-und-fünfzig“ deutliche Lautähnlichkeiten bestehen, ist dies im Dänischen nicht der Fall (mit „fem-og-fyrre“ für 45 und „fire-og-halvtreds“ für 54). Diese klaren Unterschiede in den Zahlwörtern für die Einer und die (korrespondierenden) Zehner tragen möglicherweise entscheidend dazu bei, dass es bei den dänischen Schüler:innen nur sehr selten zu Zahlendrehern kommt.

Im Gegensatz zu den deutschen zeigen die dänischen Schüler:innen keine klaren Fehlermuster. Unsere Ergebnisse deuten jedoch darauf hin, dass die Bildung der Zahlwörter für die Zehner eine besondere Herausforderung für dänische Schüler:innen darstellt. Ähnlichkeiten zwischen unterschiedlichen Zahlwörtern (z. B. „fire“ für 4, „fyrre“ für 40 und „firs“ für 80) scheinen die Verwechslung zwischen diesen Zahlen zu begünstigen.

Die hier vorgestellte explorative Studie zielte darauf ab, erste Erkenntnisse zu möglichen Unterschieden in den Fähigkeiten und insbesondere in den Schwierigkeiten von deutschen und dänischen Schüler:innen bei Übersetzungsprozessen zwischen verschiedenen Zahldarstellungen (als Zahlwort, Zahlzeichen und Menge) zu gewinnen und so das Potenzial für weitere Forschung in diesem Bereich zu eruieren. Die von uns festgestellten Unterschiede machen deutlich, dass sich ein genauerer Vergleich dieser Sprachen bzw. Länder lohnt, um genauere Erkenntnisse zum Einfluss der inversen Zahlwortbildung sowie anderer Merkmale der Zahlwortbildung auf Fehler wie Zahlendreher zu gewinnen.

Lohnenswert erscheinen uns Interviewstudien, um eine umfassendere und differenziertere qualitative Analyse der Fehler in den beiden Ländern zu ermöglichen. Auch eine Erweiterung des Diagnoseinstruments um weitere Aspekte des Stellenwertverständnisses (z.B. zum Bündelungs- und Stellenwertprinzip; vgl. Jensen et al., 2024) wäre sinnvoll. Dies könnte dazu beitragen, die Ursachen für die Diskrepanzen in den Fehlern deutscher und dänischer Schüler:innen zu identifizieren und auf dieser Grundlage Förderansätze (weiter) zu entwickeln.

Literaturverzeichnis

Carpenter, T. P., Franke, M. L., Jacobs, V. R., Fennema, E., & Empson, S. B. (1998). A longitudinal study of invention and understanding in children's multidigit addition and subtraction. *Journal for Research in Mathematics Education, 29* (1), 3-20.

Clayton, F. J., Copper, C., Steiner, A. F., Banfi, C., Finke, S., Landerl, K., & Göbel, S. M. (2020). Two-digit number writing and arithmetic in Year 1 children: Does number word inversion matter? *Cognitive Development, 56,* 2–14.

Ejersbo, L. R., & Misfeldt, M. (2015). The relationship between number names and number concepts. In X. Sun, B. Kaur & J. Novotná (Hrsg.), *Primary mathematics study on whole numbers: ICMI Study 23 conference proceedings* (S. 84–91). University of Macao.

Fromme, M. (2017). *Stellenwertverständnis im Zahlenraum bis 100. Theoretische und empirische Analysen.* Springer.

Flottmann, N., Streit-Lehmann, J., & Peter-Koop, A. (2021). *Elementar-Mathematisches BasisInterview Zahlen und Operationen. Handbuch Diagnostik.* Neubearbeitung. Mildenberger.

Gaidoschik, M., Moser Opitz, E., Nührenbörger, M., & Rathgeb-Schnierer, E. (2021). Besondere Schwierigkeiten beim Mathematiklernen. *Special Issue der Mitteilungen der Gesellschaft für Didaktik der Mathematik, 47* (111S).

Habermann, S., Donlan, C., Göbel, S. M., & Hulme, C. (2020). The critical role of Arabic numeral knowledge as a longitudinal predictor of arithmetic development. *Journal of Experimental Child Psychology,* 193, 1–15.

Hewitt, D., & Alajmi, A. H. (2023). Learning from English and Kuwaiti children's transcoding errors: how might number names be temporarily adapted to assist learning of place value? *Educational Studies in Mathematics, 114*(1), 149–172.

Jensen, S., Gasteiger, H., & Bruns, J. (2024). Place value and regrouping as helpful constructs to diagnose difficulties in understanding the place value system. *Journal für Mathematik-Didaktik,* 45(11).

Larkin, K., Ladel, S., Vale, P., Kortenkamp, U., Westaway, L., & Graven, M. (2024). Investigating the impact of language on place value learning. In L. Westaway, C. H. Stevenson-Milln, K. M. Ngcoza & C. Simuja (Hrsg.), *Book of proceedings of the 32nd annual conference for research in mathematics, science and technology education* (S. 97-111). SAARMSTE.

Moeller, K., Pixner, S., Zuber, J., Kaufmann, L., & Nuerk, H.-C. (2011). Early place-value understanding as a precursor for later arithmetic performance: A longitudinal study on numerical development. *Research in Developmental Disabilities, 32*(5), 1837–1851.

Moser Opitz, E. (2007). *Rechenschwäche / Dyskalkulie: Theoretische Klärungen und empirische Studien an betroffenen Schülerinnen und Schülern.* Haupt.

Peter-Koop., A., Wollring, B., Spindeler, B., & Grüßing, M. (2007). *ElementarMathematisches BasisInterview.* Mildenberger.

Rottmann, T., & Peter-Koop, A. (2015). Difficulties with whole number learning and respective teaching strategies. In X. Sun, B. Kaur & J. Novotná (Hrsg.), *Proceedings of ICMI-Study 23 „Primary Mathematics Study on Whole Numbers"* (S. 362-370). University of Macau.

Sale, A. (2019). *Alltagsnahe Förderung mathematischer Vorläuferfertigkeiten bei vorliegenden Entwicklungsrisiken- Evaluation einer Fördermaßnahme in der Transition Kindergarten-Schule.* Universität Oldenburg.

Steiner, A. F., Banfi, C., Finke, S., Kemény, F., Clayton, F. J., Göbel, S. M., & Landerl, K. (2021). Twenty-four or four-and-twenty: Language modulates cross-modal matching for multidigit numbers in children and adults. *Journal of Experimental Child Psychology,* 202, 104970.

SWK (2022). *Basale Kompetenzen vermitteln – Bildungschancen sichern. Perspektiven für die Grundschule.* Gutachten der Ständigen Wissenschaftlichen Kommission der Kultusministerkonferenz (SWK).

van de Walle, J.A., Karp, K.S., & Bay-Williams, J.M. (2023). *Elementary and middle school mathematics: Teaching developmentally* (11. Aufl.). Pearson.

Diagnostizieren und Fördern mathematischer Basiskompetenzen von Kindern im Rahmen der universitären Lehrkräfteausbildung

Ein Seminarkonzept und erste Ergebnisse aus dem Mathe.Kind Projekt

Jessica Hoth, Philipp Larmann, Lukas Knorr & Matthias Ludwig

Abstract

Mathematische Basiskompetenzen spielen für die Bewältigung vieler Alltagssituationen eine zentrale Rolle und sind die Grundlage für das erfolgreiche Mathematiklernen in Schule und Ausbildung. Daher ist es ein wesentliches Ziel des Mathematikunterrichts, dass die Schülerinnen und Schüler diese Kompetenzen erwerben. Um diesen Erwerb zu unterstützen, müssen Lehrkräfte einerseits über die Lernvoraussetzungen und die Lernverläufe Ihrer Schülerinnen und Schüler informiert sein und andererseits geeignete Lerngelegenheiten schaffen. Dies erfordert wiederum professionelle Kompetenzen (insbesondere diagnostische Kompetenz und konstruktivistische Einstellungen zum Lehren und Lernen) auf Seiten der Lehrkräfte. In diesem Beitrag wird ein Ausbildungskonzept beschrieben, das angehende Mathematiklehrkräfte auf das Diagnostizieren und Fördern von Kindern mit Schwierigkeiten beim Mathematiklernen vorbereiten soll. Weiterhin wird eine Begleitstudie vorgestellt, die die Entwicklung ihrer Einstellungen zum Lehren und Lernen von Mathematik durch die Teilnahme am Projekt analysiert. Dabei zeigt sich, dass die Attribution der Schwierigkeiten einzelner Kinder auf Probleme des Unterrichts abnimmt, ebenso wie ihre Einstellung zur Bedeutung von technischem mathematischen Wissen für die Lernenden.

Mathematische Basiskompetenzen, Diagnostizieren, Fördern, Einstellungen von Lehrkräften, Lehrkräftebildung

Mathematische Basiskompetenzen

Mathematische Basiskompetenzen spielen eine zentrale Rolle für das erfolgreiche Mathematiklernen. Sie ermöglichen Schülerinnen und Schülern einerseits ein anschlussfähiges Weiterlernen im Mathematikunterricht und sind andererseits zentral bei der Bewältigung alltäglicher Situationen. Insbesondere diejenigen mathematischen Kompetenzen, die Kinder bereits vor Eintritt in die Schule erwerben und die gleichzeitig als besonders prädiktiv für das Mathematiklernen in der Grundschulzeit identifiziert wurden, werden als mathematische Basiskompetenzen bezeichnet (vgl. z. B. Krajewski & Schneider, 2006; Gasteiger & Bruns, 2022). Dazu zählen beispielsweise die Zählfähigkeiten, das Mengenverständnis und das Operationsverständnis der Kinder bei Schulbeginn (Gasteiger & Bruns, 2022). In Anlehnung an Ennemoser et al. (2011) können mathematische Basiskompetenzen aber auch darüber hinaus als diejenigen basalen mathematischen Kompetenzen verstanden werden, die Voraussetzung für das mathematische Operieren sind (auch an anderen Übergängen und Stellen in der mathematischen Lernhistorie eines Kindes) und sich während der gesamten Schullaufbahn weiterentwickeln. Damit betreffen diese auch andere Bereiche, wie beispielsweise das Stellenwertverständnis, das Voraussetzung für das mathematische Operieren in größeren Zahlenräumen ist. Auch diese weiterentwickelten Basiskompetenzen sind basale Kompetenzen und grenzen sich von höheren mathematischen Kompetenzen ab (Ennemoser et al., 2011). Es konnte in verschiedenen Studien gezeigt werden, dass die mathematischen Basiskompetenzen am Schulanfang die mathematischen Kompetenzen der Kinder am Ende der Grundschulzeit voraussagen können (Krajewski & Schneider, 2006), aber auch noch die Kompetenzen der Kinder in der Sekundarstufe I (Duncan et al., 2007). Weiterhin sagen die mathematischen Basiskompetenzen von Fünftklässlerinnen und Fünftklässlern die Mathematikleistungen in der neunten Klasse voraus (Ennemoser et al., 2011).

Viele Vergleichsstudien haben gezeigt, dass ein erheblicher Anteil der Schülerinnen und Schüler in Deutschland nicht über ausreichende Basiskompetenzen im Fach Mathematik verfügt. Beispielsweise erreichen ca. 25 % der deutschen Viertklässlerinnen und Viertklässler in der TIMS Studie 2023 nicht das Kompetenzlevel 3 (Schwippert et al., 2023). Fast sechs Prozent der Lernenden erreicht nur die unterste Kompetenzstufe und verfügt damit nur über basale Kompetenzen (Schwippert et al., 2023). Auch in der Sekundarstufe deuten die internationalen Vergleichsstudien auf erhebliche Anteile von Lernenden hin, die nicht über mathematische Basiskompetenzen verfügen. Beispielsweise zeigen die aktuellen PISA-Ergebnisse von 2022, dass 30 % der Fünfzehnjährigen in Deutschland nur über mathematische Kompetenzen unterhalb oder innerhalb der untersten Kompetenzstufe verfügen (Diedrich et al., 2023). Für eine effiziente Förderung der Kinder und Jugendlichen müssen ihre Lehrkräfte unter anderem ihren Kompetenzerwerb diagnostizieren und gezielt fördern können.

Diagnostizieren und Fördern mathematischer Basiskompetenzen

Die diagnostische Kompetenz von Mathematiklehrkräften ist eine Komponente der professionellen Kompetenzen von Lehrkräften (Brunner et al., 2011). Neben dem Diagnostizieren der Lernausgangssituation, dem Lernverlauf und den Lernergebnissen werden in vielen Konzeptualisierungen auch das Entwickeln und Durchführen von Fördermaßnahmen zu dieser Fähigkeit gezählt (z. B. Hoth et al., 2016). Dabei ist es bereits Ziel der universitären Lehramtsausbildung, Kompetenzen der angehenden Lehrkräfte zum Diagnostizieren und Fördern zu entwickeln (KMK, 2022), da unter anderem bekannt ist, dass gerade Lehramtsstudierende und Lehrkräfte in einer frühen Phase ihres Berufslebens Schwierigkeiten haben, Fehler von Lernenden und deren Ursachen zu identifizieren und geeignete Förderkonzepte zu entwickeln (Türling et al., 2012). Andererseits konnte auch gezeigt werden, dass diese Kompetenzen in der universitären Ausbildung grundsätzlich förderbar sind (Heinrichs, 2015). Dabei werden Praxisanteile als relevant angenommen. Es führt allerdings nachweislich nicht jede Praxiserfahrung zum Diagnostizieren und Fördern zu einem Kompetenzzuwachs (Dingemans, 2024), es kommt vielmehr auf die Qualität der Betreuung an (Hascher, 2012).

Affektiv-motivationale Aspekte spielen dabei eine besondere Rolle für das Diagnostizieren und Fördern – insbesondere von Fehlern beim Mathematiklernen (Hoth et al., 2022; Wuttke & Seifried, 2017) bzw. für die Unterrichtsgestaltung und Lehrkräfteperformanz im Allgemeinen (Blömeke et al., 2015). Es gibt bereits mehrere empirische Hinweise darauf, dass die Fähigkeiten zum Erkennen und Aufgreifen von Schülerfehlern mit einer eher konstruktivistischen Einstellung zum Lehren und Lernen von Mathematik einhergeht – Lernen also als ein von den Kindern initiierter und selbstgesteuerter Prozess verstanden wird (Hoth et al., 2022; Gritful-Freixenet et al., 2020). Konstruktivistische Einstellungen können sich in den Zielen der Lehrkräfte für ihren Unterricht zeigen oder durch ihre Einstellungen dazu, was einen guten Mathematikunterricht auszeichnet, sowie ihren Einstellungen über Lehr- und Lernbedingungen allgemein (z. B. Attribution von schwachen Schülerleistungen; vgl. Baumert et al., 2009).

Mit dem Ziel, einerseits die diagnostische Kompetenz von angehenden Mathematiklehrkräften im Studium und andererseits die mathematischen Basiskompetenzen von Kindern mit Schwierigkeiten beim Mathematiklernen zu fördern wurde an der Goethe-Universität Frankfurt und durch die finanzielle Unterstützung der Hans und Ria Messer Stiftung ein Ausbildungskonzept für die erste Phase der Lehrkräftebildung entwickelt: Das Lehrprojekt Mathe.Kind.

Das Lehrprojekt Mathe.Kind

Um einerseits die Kompetenzentwicklung der Studierenden zu erreichen und andererseits Schülerinnen und Schüler bei der (Weiter-)Entwicklung mathematischer Basiskompetenzen zu unterstützen, konnten Studierende in dem Lehrprojekt Mathe.Kind während eines Semesters mit Kindern arbeiten, die besondere Schwierigkeiten beim Mathematiklernen haben bzw. denen mathematische Basiskompetenzen fehlen. Die Seminare fanden strukturgleich im Grundschullehramt und den Sekundarstufenlehrämtern statt. Vor dem Start eines Semesters wurden Schulen angeschrieben, die Kinder für das Programm vorschlagen konnten. Mit allen Kindern, die sich zur Teilnahme an dem Projekt gemeldet hatten, wurden vorab Grobdiagnosen durchgeführt, um zu entscheiden, ob die Kinder in das Programm aufgenommen werden, und einen ersten Überblick über den Stand der mathematischen Basiskompetenzen zu erhalten. Mit dem Start des Semesters wurden die teilnehmenden Studierenden zunächst intensiv auf die Diagnostik und anschließende Förderung vorbereitet, sodass ab der dritten Semesterwoche die Arbeit mit den Kindern beginnen konnte. Die Studierenden arbeiteten jeweils im Tandem mit einem Kind und erhoben beim ersten Treffen im Rahmen einer Feindiagnose und mithilfe geeigneter diagnostischer Verfahren (in der Grundschule beispielsweise mit dem Elementarmathematischen Basisinterview; Flottmann et al., 2021) die mathematischen Kompetenzen der Kinder. Auf der Grundlage dieser Informationen entwickelte jedes Tandem einen Förderplan für ihr jeweiliges Förderkind, der während des Semesters wöchentlich durchgeführt wurde. Die Kinder kamen dafür jede Woche für 60 Minuten an die Universität und arbeiteten mit den Fördertandems in separaten Räumen. Die Förderpläne entwickelten die Studierenden basierend auf den zuvor diskutierten Theorien in der Seminarvorbereitung und in enger Abstimmung mit den jeweiligen Dozierenden. In der letzten Sitzung wurde erneut eine Feindiagnose durchgeführt, um die Kompetenzentwicklung der Kinder zu messen. Ein Projektdurchgang bestand in der Regel aus einem Vorbereitungsblock für die Studierenden, einer Grobdiagnose für die Kinder, zwei Feindiagnosen mit dem Fördertandem und 8-10 Förderstunden für die Kinder. Während des Semesters wurden die Studierenden in regelmäßig stattfindenden Reflexionsgesprächen begleitet, in denen die aktuelle Arbeit mit den Förderkindern reflektiert und die verfügbaren Informationen für die Weiterentwicklung und Überarbeitung der Förderpläne genutzt wurde. Als Vorbereitung auf die individuellen Begleitgespräche schickten die Studierenden die unmittelbar anstehenden Planungen für die Fördersitzungen an die Dozierenden. Insgesamt gab es in dem Lehrprojekt zwischen 2022 und 2024 fünf Durchgänge. Einige Kinder blieben während der kompletten Projektlaufzeit im

Programm, sodass die Ergebnisse aus dem vorangegangenen Durchgang für den darauffolgenden genutzt werden konnten. Insgesamt konnten so 82 Förderplätze an Kinder vergeben werden und insgesamt nahmen 162 Studierende an den Seminaren teil.

Der Erfolg dieses Programms war einerseits über sehr gute Lehrevaluationen messbar, andererseits zeigten auch die Auswertungen der Feindiagnosen zu Beginn und am Ende eines Semesters einen Zuwachs bei den mathematischen Kompetenzen der Kinder. Neben dem Kompetenzzuwachs auf Seiten der Schülerinnen und Schüler sollte durch das Lehrprojekt auch die professionelle Kompetenz der Studierenden entwickelt werden. Um die Entwicklung von Kompetenzfacetten der Studierenden zu evaluieren, wurde in einem Durchgang (Wintersemesters 2023/24) die Entwicklung der Einstellungen der teilnehmenden Studierenden zum Lehren und Lernen von Mathematik erhoben.

Empirische Studie zur Entwicklung von Einstellungen der Studierenden zum Lehren und Lernen von Mathematik

Da die Studierenden in dem Seminar mit Kindern arbeiten, die besondere Schwierigkeiten beim Mathematiklernen haben, kann sich die intensive Einzelfallbetreuung auf die Entwicklung ihrer Einstellungen zum Lehren und Lernen auswirken. Um eine Veränderung der Einstellungen zu erheben, wurden von einem Durchgang (37 Studierende im Wintersemester 2023/24) im Prä-Post-Design und mithilfe eines online-Fragebogens die Einstellungen zum Lehren und Lernen von Mathematik erhoben. Konkret wurden Fragebögen aus der COACTIV Studie (Baumert et al., 2009) und TEDS-M genutzt:

(a) zu Präskriptiven Theorien des Mathematiklernens (Baumert et al., 2009, S. 75ff.): Selbstständiges und verständnisvolles diskursives Lernen (12 Items), Rezeptives Lernen durch Beispiele und Vormachen (12 Items), Vertrauen auf mathematische Selbstständigkeit der Schüler und Schülerinnen (5 Items), Einschleifen von technischem Wissen (4 Items) & Eindeutigkeit des Lösungsweges (2 Items),

(b) zur Attribution von schwachen Schülerleistungen (Baumert et al., 2009, S. 81ff.): Attribution auf mangelnde Anstrengung und Motivation (6 Items), Attribution auf Probleme des Unterrichts (7 Items) & Attribution auf mangelnde Begabung (4 Items) und

(c) Einstellungen zu Mathematik als angeborene Fähigkeit (8 Items; Biedermann et al., 2015).

Die Einschätzungen der Studierenden wurden zu allen 56 Items mit einer vierstufigen Likert-Skala erhoben (1: Ich stimme nicht zu, 2: Ich stimme eher nicht zu, 3: Ich stimme eher zu, 4: ich stimme zu). Neben den Einstellungen der Studierenden wurden weitere Hintergrundinformationen wie das Alter, Geschlecht, Studiengang, Fachsemester, Abiturnote und die Note in Mathematik im Abitur miterhoben.

Insgesamt nahmen 37 Studierende an der Erhebung teil (27 Frauen, neun Männer, eine fehlende Angabe). 24 dieser Personen studieren Mathematik für das Lehramt an Grundschulen, 13 für das Lehramt an weiterführenden Schulen (darunter drei Studierende für das Haupt- und Realschullehramt, neun Studierende für das Lehramt an Gymnasien und eine Person für das Sonderschullehramt). Von 34 Studierenden sind Daten aus der Erhebung zu Beginn des Semesters verfügbar, von 31 Studierenden am Ende des Semesters. Von 27 Personen liegen Informationen aus beiden Befragungszeitpunkten vor.

Tabelle 1 zeigt die Hintergrundinformationen der Stichprobe.

Variable	min	max	Mittelwert	Std Abw.
Alter	19	35	23,26	3,26
Abitur	1,0	3,0	2,0	0,51
Fachsemester	5	14	6,62	1,8
Notenpunkte in Mathematik im Abitur	2	15	10,5	3,1

Tabelle 1: Hintergrundinformationen der Stichprobe

Für jede/n Studierende/n wurde zusätzlich der Mittelwert aus allen Angaben der Items auf den zuvor genannten Skalen bestimmt. Die Reliabilitäten der erhobenen Skalen waren (auch getrennt nach Prä- und Post-Erhebung) befriedigend bis gut mit $.69 < x < .96$. Tabelle 2 zeigt die Mittelwerte aus den Befragungen der Einstellungen der Studierenden zu den jeweiligen Skalen und getrennt nach Erhebungszeitpunkt.

Variable	Mittel-wert Prä	Std Abw. Prä	Mittel-wert Post	Std Abw. Post
Selbstständiges und verständnisvolles diskursives Lernen	3,54	0,30	3,50	0,37
Rezeptives Lernen durch Beispiele und Vormachen	2,3	0,56	2,24	0,50
Vertrauen auf mathematische Selbst-ständigkeit der Schüler und Schülerinnen	3,35	0,44	3,18	0,50
Einschleifen von technischem Wissen	2,78	0,71	2,49	0,64
Eindeutigkeit des Lösungswegs	1,75	0,59	2,0	0,78
Attribution auf mangelnde Anstrengung und Motivation	2,91	0,70	2,65	0,65
Attribution auf Probleme des Unterrichts	3,52	0,43	3,28	0,47
Attribution auf mangelnde Begabung	2,20	0,67	1,97	0,59
Einstellungen zu Mathematik als angeborene Fähigkeit	1,61	0,47	1,58	0,42

Tabelle 2: Mittelwerte der Ausprägungen der teilnehmenden Studierenden zu den Einstellungen zum Lehren und Lernen von Mathematik vor und nach der Seminarteilnahme und Einzelförderung

Um zu prüfen, ob sich die Einstellungen der Studierenden nach dem Semester intensiver Einzelarbeit mit Schülerinnen und Schülern mit besonderen Schwierigkeiten beim Mathematiklernen verändern, wurden die Mittelwerte in Prä- und Post-Erhebung verglichen. Der Kolmogorov-Smirnov-Test ebenso wie der Shapiro-Wilk-Test zeigte, dass die Daten der

Variablen ‚Attribution auf Probleme des Unterrichts' und ‚Eindeutigkeit des Lösungswegs' nicht normalverteilt sind. Für diese beiden Variablen wurde der Wilcoxon-Test bei verbundenen Stichproben für die Analyse der Mittelwertunterschiede verwendet, für alle anderen Variablen der gepaarte t-test. Signifikante Unterschiede zwischen den Einstellungen der Studierenden vor und nach der Einzelförderung zeigten sich nur bei den Variablen ‚Attribution auf Probleme des Unterrichts' ($z = -2.12$, $p < .05$) und der Variablen ‚Einschleifen von technischem Wissen' ($t\ (22) = 2{,}26$, $p = .034$). In beiden Fällen ging die mittlere Zustimmung zu den Aussagen auf den Skalen signifikant zurück.

Diskussion

Im Rahmen der Studie zur Veränderung von Einstellungen zum Lehren und Lernen durch eine intensive Einzelförderung von Kindern, die besondere Schwierigkeiten beim Mathematiklernen haben, hat sich gezeigt, dass viele Einstellungen auch durch die intensive Einzelarbeit mit den Kindern stabil sind. Der signifikante Rückgang der Attribution der besonderen Schwierigkeiten auf Merkmale des Unterrichts (Skala Attribution auf Probleme des Unterrichts) kann darin begründet sein, dass die Studierenden eine individualisierte Förderung angeboten haben, die auf die Fähigkeiten und Bedürfnisse der Kinder zugeschnitten sein sollte. Viele Studierende haben (auch durch die Empfehlung der Begleitung in den Seminaren) unterschiedliche Zugänge ausprobiert (z. B. materialgestützt) und sind häufig trotzdem auf Verständnisschwierigkeiten gestoßen, die wiederum in der Reflexion im Seminar diskutiert wurden. Daher haben die Studierenden in der Regel sehr intensive Arbeit in die Vorbereitung einer Einzelförderung gesteckt, die aber trotzdem nicht immer zu Erfolg geführt hat, sodass hier ein Rückgang der Zustimmung erkennbar ist. Andererseits ging auch die Zustimmung zur Bedeutung von technischem Wissen zurück, was darauf hindeutet, dass die Studierenden entweder positive Erfahrungen mit einem auf Verstehen fokussierten Unterricht gemacht haben oder andererseits festgestellt haben, dass das Trainieren von Faktenwissen und wiederholende Üben nicht automatisch zu Verständnis von Zahlen und Operationen führt. Um hier die Hintergründe zu verstehen, wären zusätzliche Interviews mit den Studierenden hilfreich, aus denen die Ursachen für die Unterschiede rekonstruiert werden könnten. Weitere Limitationen der hier vorgestellten Studie sind die geringe Stichprobengröße, die vermutlich zu vielen nicht signifikanten Unterschieden führt, und die fehlende Kontrollgruppe. Der Vergleich mit einer Kontrollgruppe könnte sicherstellen, dass die gemessenen Unterschiede in den Einstellungen der Studierenden auch tatsächlich auf die besuchte Lehrveranstaltung zurückgeführt werden können und nicht aus anderen Situationen oder Lerngelegenheiten der Studierenden erwachsen. Interessant ist auch, dass die Studierenden bei den Skalen zur Attribution im Mittel anders antworten als die COACTIV Lehrkräfte 2003 bzw. 2004 (vgl. Baumert et al., 2008). Bei der Attribution der Probleme einzelner Lernender auf mangelnde Anstrengung und Motivation lag der Mittelwert der 341 COACTIV Lehrkräfte 2003 bei M=3,20, während der Mittelwert der Studierenden in unserer Stichprobe bei M=2,91 liegt. Andererseits attribuieren die Lehrkräfte aus COACTIV Schwierigkeiten nur im Mittel mit M=2,36 auf Probleme des Unterrichts, während dies bei den Studierenden vor Beginn der Förderung bei M=3,52 liegt. Offensichtlich attribuieren die Studierenden Probleme der Kinder stärker mit Maßnahmen, die der Mathematikunterricht bereitstellen kann und weniger mit internalen Faktoren auf Seiten der Kinder, während sich das bei praktizierenden Lehrkräften leicht verschiebt. Die Entwicklung der Einstellungen zur Attribution der Schwierigkeiten einiger Kinder auf Probleme des Unterrichts innerhalb eines Semesters, in dem die Studierenden Einzelförderungen übernehmen, könnte darauf hindeuten, dass Praxiserfahrungen im Umgang mit Kindern mit besonderen Schwierigkeiten beim Mathematiklernen hier eine Veränderung der Attribution bewirkt. Wie sich dies auf die Unterrichtsgestaltung und geplanten Fördermaßnahmen auswirkt, muss noch geklärt werden.

Literaturverzeichnis

Baumert, J., Blum, W., Brunner, M., Dubberke, T., Jordan, A., Klusmann, U. (2009). *Professionswissen von Lehrkräften, kognitiv aktivierender Mathematikunterricht und die Entwicklung von mathematischer Kompetenz (COACTIV):* Dokumentation der Erhebungsinstrumente. Max-Planck-Institut für Bildungsforschung.

Biedermann, H., Brühwiler, C., Oser, F., Affolter, B., Bach, A. (2015). Überzeugungen zur Mathematik und zum Erwerb mathematischen Wissens. In F. Oser, H. Biedermann, C. Brühwiler, & S. Steinmann (Hrsg.), *Zum Start bereit? Kritische Ergebnisse aus TEDS-M zur schweizerischen Lehrerbildung im internationalen Vergleich* (Beiträge der Schweizer Bildungsforschung, Band 4, S. 339-376). Verlag Barbara Budrich. https://doi.org/10.18747/PHSG-coll3/id/660

Blömeke, S., Gustafsson, J.-E., and Shavelson, R. J. (2015). Beyond dichotomies: competence viewed as a continuum. *Z. Psychol.* 223, 3–13. doi: 10.1027/2151-2604/a000194

Brunner, M., Anders, Y., Hachfeld, A. & Krauss, S. (2011). Diagnostische Fähigkeiten von Mathematiklehrkräften. In: M. Kunter, J. Baumert, W. Blum, U. Klusmann, S. Krauss & M. Neubrand (Hrsg.), *Professionelle Kompetenz von Lehrkräften. Ergebnisse des Forschungsprogramms COACTIV* (S. 215–234). Waxmann.

Diedrich, J., Reinhold, F. Heinze, A. & Reiss, K. (2023). Mathematische Kompetenz in PISA 2022. Von Leistungsunterschieden und ihren Entwicklungen. In: D. Lewalter, J. Diedrich, F. Goldhammer, O. Köller & K. Reiss (Hrsg.). *PISA 2022. Analyse der Bildungsergebnisse in Deutschland.* (S. 53–86). Waxmann.

Dingemans, S. (2024). *Entwicklung mathematikspezifischer diagnostischer Kompetenz im Praxissemester von Studierenden im Lehramt Grundschule.* Springer Spektrum. https://doi.org/10.1007/978-3-658-45853-9

Duncan, G. J., Dowsett, C. J., Claessens, A., Magnuson, K., Huston, A. C., Klebanov, P. et al. (2007). School Readiness and Later Achievement. *Developmental Psychology,* 43(6), 1428–1446. https://doi.org/10.1037/0012-1649.43.6.1428

Ennemoser, M., Krajewski, K. & Schmidt, S. (2011). Entwicklung und Bedeutung von Mengen-Zahlen-Kompetenzen und eines basalen Konventions- und Regelwissens in den Klassen 5 bis 9. *Zeitschrift für Entwicklungspsychologie und Pädagogische Psychologie,* 43 (4), 228–242.

Flottmann, N. - C., Streit-Lehmann, J., & Peter-Koop, A. (2021). *ElementarMathematisches BasisInterview. Zahlen und Operationen. Materialpaket zum Handbuch Diagnostik*. Mildenberger.

Gasteiger, H. & Bruns, J. (2022): *Mathematische Basiskompetenzen und tragfähiges Zahlverständnis zum Schulanfang – Basistext.* Open Educational Resources.

Griful-Freixenet, J., Vantieghem, W., Gheyssens, E., and Struyven, K. (2020). Connecting beliefs, noticing and differentiated teaching practices: a study among pre-service teachers and teachers. *Int. J. Incl. Educ. 1*, 1–18. doi: 10.1080/13603116.2020.1862404

Hascher, T. (2012). Lernfeld Praktikum – Evidenzbasierte Entwicklungen in der Lehrer/innenbildung. *Zeitung für Bildungsforschung(2)*, 109–129. https://doi.org/10.1007/s35834-012-0032-6

Heinrichs, H. (2015). *Diagnostische Kompetenz von Mathematik-Lehramtsstudierenden: Messung und Förderung.* Springer.

Hoth, J., Döhrmann, M., Kaiser, G., Busse, A., König, J. & Blömeke, S. (2016). Diagnostic competence of primary school mathematics teachers during classroom situations. *ZDM Mathematics Education, 48*(1–2), 41–54.

Hoth, J., Larrain, M. & Kaiser, G. (2022). Identifying and dealing with student errors in the mathematics classroom: Cognitive and motivational requirements. *Front. Psychol. 13:*1057730. doi: 10.3389/fpsyg.2022.1057730

Krajewski, K. & Schneider, W. (2006). Mathematische Vorläuferfertigkeiten im Vorschulalter und ihre Vorhersagekraft für die Mathematikleistungen bis zum Ende der Grundschulzeit. *Psychologie in Erziehung und Unterricht,* 53(4), 246–262.

Kultusministerkonferenz der Länder (KMK) (2022). *Standards für die Lehrerbildung: Bildungswissenschaften.* https://www.kmk.org/fileadmin/Dateien/veroeffentlichungen_beschluesse/2004/2004_12_16-Standards-Lehrerbildung.pdf

Schwippert, K.; Kasper, D., Eickelmann, B., Goldhammer, F., Köller, O., Selter, C. & Steffensky, M. (2023). *TIMSS 2023. Mathematische und naturwissenschaftliche Kompetenzen von Grundschulkindern in Deutschland im internationalen Vergleich.* Pressemappe. Waxmann.

Türling, J. M., Seifried, J. & Wuttke, E. (2012). Teachers' Knowledge about Domain Specific Student Errors. In J. Seifried & E. Wuttke (Hrsg.), *Learning from errors at school and at work* (S. 95–110). Budrich.

Wuttke, E., and Seifried, J. (2017). Competence, teacher competence and professional error competence: an introduction, In: E. Wuttke and J. Seifried (Hrsg.). *Professional Error Competence of Preservice Teachers.* (S. 1–14) Springer.

Förderung diagnostischer Kompetenzen von fachfremd Studierenden

Ein Seminarkonstrukt auf Basis des ElementarMathematischen BasisInterview (EMBI)

Meike Grüßing, Ilka Burhorst & Nina Engel

Abstract

Die diagnostische Kompetenz ist eine zentrale Schlüsselkompetenz von Lehrkräften und damit auch ein bedeutender Schwerpunkt im Lehramtsstudium. Im Rahmen dieses Beitrages wird dargestellt, wie fachfremd Studierende – Studierende ohne ein fachwissenschaftliches Mathematikstudium – an der Universität Vechta ihre diagnostische Kompetenz ausbauen können. Das zugrunde liegende Seminarkonstrukt hat den Schwerpunkt auf der Arbeit mit dem **E**lementar **M**athematischen **B**asis **I**nterview (**EMBI**). Ziel ist es, durch die theoriegeleitete Analyse der Anforderungen in den einzelnen Abschnitten des Interviews, die eigenständige Durchführung und die Analyse der Schüler:innenlösungen konkrete Handlungserfahrungen im Bereich Diagnostik mathematischer Basiskompetenzen zu ermöglichen und gleichzeitig die notwendigen fachdidaktischen Werkzeuge zur Analyse des Lernstandes und zur Gestaltung einer Lernumgebung zur Förderung der individuellen Lernentwicklung der Schüler:innen zu erarbeiten. Die Effekte des Seminars wurden im Rahmen einer ersten Evaluation des Konzeptes auf Basis einer Befragung und Reflexionen der Studierenden sowie auf Grundlage von Einblicken in die Arbeitsergebnisse der Studierenden überprüft. Insgesamt zeigen diese, dass durch das Seminarkonstrukt bei fachfremd Studierenden zuvor bestehende Hemmnisse abgebaut werden können, eine intensive Auseinandersetzung mit den fachdidaktischen Inhalten erfolgt und positive Lerneffekte erzeugt werden konnten.

Diagnostische Kompetenz, Lehrkräftebildung, fachfremde Lehrkräfte, diagnostische Instrumente,ElementarMathematisches BasisInterview

Rahmenbedingungen der Qualifikation von Studierenden mit dem Ziel des Lehramts an Grundschulen an der Universität Vechta

Im Rahmen der Lehramtsausbildung wählen Studierende an der Universität Vechta zwei lehramtsbildende Fächer im Bachelor Combined Studies, die im Master of Education vertieft werden. Für das Lehramt an Grundschulen muss eines dieser Fächer Deutsch oder Mathematik sein. Die überarbeitete Verordnung über Masterabschlüsse für Lehrämter in Niedersachsen (Niedersächsisches Kultusministerium, 2024) sieht für die Zulassung zum Vorbereitungsdienst in der Primarstufe sowohl die fachwissenschaftliche und fachdidaktische Ausbildung im Studienfach Mathematik oder Deutsch (im Umfang von 60 Leistungspunkten) als auch eine grundlegende Auseinandersetzung in dem jeweils anderen Fach (im Umfang von 12 Leistungspunkten) vor.

An der Universität Vechta wurde zum Wintersemester 2022/2023 ein entsprechendes Modulangebot für Studierende, die nicht Mathematik als Studienfach gewählt haben, entwickelt. Das Modul „Schulmathematik der Primarstufe aus fachwissenschaftlicher und fachdidaktischer Perspektive" vermittelt Grundlagen für den Mathematikunterricht in der Primarstufe. Dabei stehen die eigene aktiv-entdeckende Auseinandersetzung mit den Inhalten auf verschiedenen Darstellungsebenen und die Reflexion des eigenen Lernprozesses im Vordergrund. Das darauf aufbauende Modul „Mathematiklernen in der Primarstufe" thematisiert in einem Seminar didaktische Zugänge zu ausgewählten Themen. Einen Schwerpunkt bildet dabei die Entwicklung der elementaren arithmetischen Basiskompetenzen. Ein ergänzend stattfindendes Seminar zielt auf die Entwicklung der diagnostischen Kompetenz der Studierenden ab; wobei auch hier die *elementaren arithmetischen Basiskompetenzen* im Sinne von tragfähigen Zahl- und Mengenvorstellungen, der Zählkompetenz, des dezimalen Stellenwertverständnisses, des Operationsverständnisses und der Rechenstrategien beim flexiblen Zahlenrechnen im Vordergrund stehen.

Diagnostische Kompetenz angehender Lehrkräfte

Diagnostische Kompetenz

Weinert (1998) benennt als vier fundamentale Schlüsselkompetenzen für die erfolgreiche Bewältigung der Anforderungen des Lehrberufs neben der Klassenführungskompetenz, der fachlichen sowie fachdidaktischen und methodischen Kompetenz auch die *diagnostische Kompetenz*. Die diagnostische Kompetenz lässt sich nach Leuders et al. (2018) als Kontinuum darstellen.

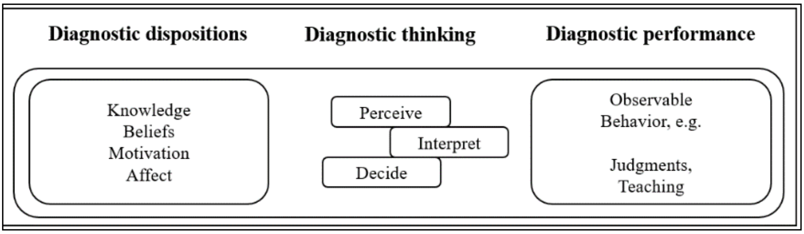


Abb. 1: Diagnostische Kompetenz nach Leuders et al. (2018, S.9)

Dabei umfassen die diagnostischen *Dispositionen* die personenbezogenen Voraussetzungen wie das Wissen und die Überzeugungen, die innerhalb der Lehrkraft stabil sind und zum erfolgreichen Handeln in diagnostischen Situationen beitragen. Das *diagnostische Denken* beschreibt die situationsspezifischen Prozesse für die Entscheidungsfindung. Die Analyseprozesse basieren auf den diagnostischen Dispositionen und werden im *diagnostischen Handeln* (z. B. Leistungsbeurteilung, Aufgabenauswahl) sichtbar (Leuders et al., 2018, S. 8; Philipp, 2023, S. 12).

Entwicklung diagnostischer Kompetenz im Studium

Studien deuten darauf hin, dass die diagnostische Kompetenz von (angehenden) Lehrkräften ohne eine gezielte Schulung nicht ausreichend ausgeprägt sei. Sie wird jedoch als lern-, trainier- und erweiterbar angesehen (vgl. zusammenfassend Eichler et al., 2023). In der universitären Ausbildung ist es aufgrund der theoretischen Ausrichtung zunächst von besonderer Bedeutung, die Wissensgrundlage aufzubauen. Im Fall des dargestellten Moduls steht das Wissen über die elementaren arithmetischen Basiskompetenzen im Mittelpunkt. Aus aktuellen Studien gibt es Erkenntnisse, die für die Förderung diagnostischer Kompetenz berücksichtigt werden können. Trainingsformen mithilfe von *Simulationen und Videovignetten* können eine zentrale Rolle einnehmen (Dingemans, 2024, S. 103 ff.; Leuders et al., 2022) und unterstützen die Studierenden beispielsweise bei der Vorbereitung auf eigene Interviews zur Erfassung der Basiskompetenzen von Schüler:innen. Durch die komplexitätsreduzierende Darstellung der Situation kann eine differenzierte Auseinandersetzung mit ausgewählten Aspekten erfolgen und ein praxisorientiertes Wissen aufgebaut werden. Darüber hinaus besitzen auch *Diagnostische Interviews* ein besonderes Potenzial zur Förderung diagnostischer Kompetenz (Clarke, 2013; Clarke et al., 2011; 2018; Wollring et al., 2013).

Philipp (2018, S. 122 f.; Ostermann et al., 2019, S. 106 ff.) leitet in diesem Zusammenhang ein idealisiertes Ablaufschema mit mehreren Diagnoseschritten ab, mit dem die Bearbeitung der Interviews erfolgen kann. Zunächst wird ein Lösungsansatz erstellt. Dabei ist sowohl das Entwickeln einer Lösung aus eigener Perspektive als auch das Einnehmen der Schüler:innenperspektive möglich. Im Anschluss werden die Anforderungen sowie mögliche Hürden analysiert. Das Nachvollziehen des Lösungsweges von Schüler:innen beinhaltet das Erkennen von Kompetenzen und Fehlern, zu denen im Anschluss Fehlerhypothesen aufgestellt werden. Dingemans (2024, S. 64) hebt in einem für seine Studie ausgeschärften Modell den Teilschritt der Überprüfung möglicher Fehlerursachen hervor.

Das Modul „Mathematiklernen in der Primarstufe" an der Universität Vechta

Das in Abb. 1 dargestellte Modell der diagnostischen Kompetenz (Philipp, 2018, S. 122) hebt die Bedeutung der Wissenskomponente hervor. Daher knüpft das Modul „Mathematiklernen in der Primarstufe" an das vorangegangene Modul zur Schulmathematik der Primarstufe an und vertieft die Inhalte aus fachdidaktischer Perspektive in zwei thematisch eng aufeinander abgestimmten Seminaren. Ein Schwerpunkt liegt auf der Entwicklung mathematischer Basiskompetenzen in den ersten beiden Schuljahren. Dazu werden die fachdidaktischen Grundlagen gesichert und im ergänzenden Seminar die diagnostischen Kompetenzen geschult. Für die Entwicklung der diagnostischen Kompetenz werden diagnostische Interviews zur Erhebung arithmetischer Basiskompetenzen eingesetzt.

Clarke (2013) hebt die Bedeutung aufgabenbasierter Einzelinterviews für die (Weiter-)entwicklung professioneller Kompetenzen von Lehrkräften hervor. Geeignete Konzepte und Materialien wurden beispielsweise in groß angelegten Projekten in Australien wie dem „Early Numeracy Research Project" (Bobis et al., 2005) entwickelt. Das diagnostische Interview, das im Zentrum dieses Projekts stand, wurde von Arbeitsgruppen um Andrea Peter Koop für die Nutzung in deutschen Schulen als „ElementarMathematisches BasisInterview (EMBI)" adaptiert und in die Lehrkräftebildung implementiert (Peter-Koop & Grüßing, 2006; Peter-Koop et al., 2007; Flottmann et al., 2021; Streit-Lehmann et al., 2021; Wollring et al., 2013). Zentrale Elemente dieses Interviews sind ein Konzept aus theorie- und forschungsbasiert entwickelten Meilensteinen der Entwicklung des mathematischen Denkens im Bereich „Zahlen und Operationen" in den ersten Schuljahren und einem Interviewleitfaden zur Erfassung dieser Kompetenzentwicklung.

Das ElementarMathematische BasisInterview steht im Mittelpunkt des Seminars zur Entwicklung diagnostischer Kompetenz. Zunächst analysieren die Studierenden die Aufgabenstellungen theoriebasiert im Seminar. Sie entwickeln eigene Lösungsideen und nehmen die Perspektive der Schüler:innen ein (vgl. erster Diagnoseschritt nach Philipp, 2018). Im Anschluss führen sie das Interview mit einem Kind im Alter von fünf bis acht Jahren durch und arbeiten weitere Diagnoseschritte heraus. Die eigenen, authentischen Erfahrungen bieten eine Annäherung an die Komplexität diagnostischer Prozesse. Auf Grundlage der Analysen der Aufgabenbearbeitungen des Kindes ziehen die Studierenden Rückschlüsse auf den Stand der mathematischen Kompetenzentwicklung im Bereich „Zahlen und Operationen" und entwickeln erste Förderimpulse für die Begleitung der weiteren Lernentwicklung, die in einem Portfolio als Modulprüfung dokumentiert werden.

Qualifikation von fachfremden Studierenden – Herausforderungen und erste Ergebnisse der Evaluation des Modulkonzepts

Das Konzept für diese Module berücksichtigt die besonderen Bedürfnisse der Zielgruppe, beispielsweise in Bezug auf Einstellungen und Haltungen zum Fach. In Anlehnung an Porsch (2020) definieren wir *fachfremd Studierende* als diejenigen, die kein Fachstudium in dem jeweiligen Fach absolviert haben. Im weiteren Ausbildungsweg dieser Studierenden erfolgt keine weitere Qualifikation in dem fremden Fach. Somit unterrichten Lehrkräfte in der Grundschule diese Fächer zum Teil fachfremd. Die Gründe dafür ergeben sich gerade in der Grundschule aus dem Klassenlehrer:innenprinzip und der Vermeidung von Unterrichtsausfällen (Porsch, 2020, S. 3). In Bezug auf das Fach Mathematik wurde im IQB-Bildungstrend von 2016 ein Anteil von fast einem Drittel fachfremd unterrichtender Lehrkräfte deutschlandweit ausgemacht (Rjosk et al., 2017, S. 342). Betrachtet man die Befunde zum fachfremden Unterrichten, so lassen sich kontroverse Erkenntnisse aufzeigen (vgl. dazu Porsch, 2020, S. 13 ff.). Eine große Schwierigkeit ist, dass kaum Längsschnittstudien vorhanden sind, die den Unterricht und die erreichten Schüler:innenleistungen von fachfremden Lehrkräften und Fachlehrkräften vergleichen (Porsch, 2020, S. 19). Hinsichtlich der diagnostischen Kompetenz ist hingegen bekannt, dass die diagnostischen Dispositionen einen deutlichen fachspezifischen Anteil im Zusammenhang mit der Handlungsfähigkeit aufweisen (Leuders et al., 2018). Eine fachliche Ausbildung und Vorbereitung ist daher für die Qualität des Unterrichts von großer Bedeutung.

Allerdings ist noch weitestgehend unklar, wie weit Fachkenntnisse im Rahmen der Grundausbildung der angehenden Lehrkräfte vermittelt werden können, um einen qualitätsvollen Unterricht zu realisieren (Porsch, 2020, S. 39). Im Rahmen einer Qualifizierung der fachfremd Studierenden ergeben sich verschiedene Herausforderungen, die im Rahmen der Eingangsbefragung im Modul erhoben wurden.

Skizze des methodischen Vorgehens

Zu Beginn des ersten Moduls „*Schulmathematik der Primarstufe aus fachwissenschaftlicher und fachdidaktischer Perspektive*“ im Wintersemester 2024/2025 nahmen 89 Studierende an einer Befragung teil. Der Fragebogen enthielt sowohl geschlossene Fragen in Form von Einschätzungen auf einer fünfstelligen Ratingskala als auch offene Fragen zur Erhebung der Einstellungen und Sichtweisen auf das Fach Mathematik. Darüber hinaus haben die Studierenden ihre Lernentwicklung in einem Portfolio dargestellt.

Einblick in erste Erkenntnisse der Erhebungen

Aus dem geschlossenen Teil der Befragung der fachfremd Studierenden konnten verschiedene Herausforderungen (s. Abb. 2) für die Ausbildung abgeleitet werden, die sich den übergeordneten Kategorien „Herausforderungen hinsichtlich des Fachwissens“ (1–3), „Herausforderungen hinsichtlich des fachdidaktischen Wissens“ (4&5) und „Herausforderungen hinsichtlich förderdiagnostischer Kompetenzen“ (6) zuordnen lassen.

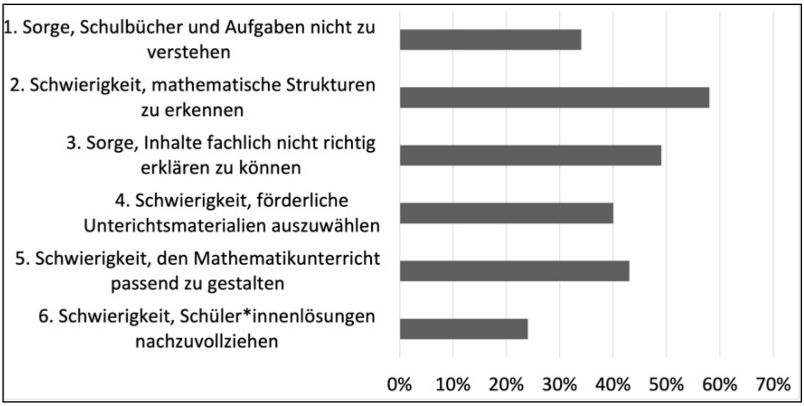


Abb. 2: Herausforderungen der Studierenden (n=89) im Hinblick auf fachfremden Mathematikunterricht

Durch die offenen Fragen konnten weitere Herausforderungen herausgestellt werden. Die Studierenden gaben hinsichtlich der diagnostischen Fähigkeiten an, es als herausfordernd zu empfinden, alle Schüler:innen bestmöglich zu fördern und „*die verschiedenen Lerntypen*“ auch im Fach Mathematik zu erkennen. Weiter bestehe die Schwierigkeit „*Selbstverständlichkeiten für Erwachsene [hinsichtlich mathematischer Strukturen z. B. im Aufbau des Zahlsystems] trotzdem [zu] erkennen und [zu] erklären*“. Darüber hinaus konnten in einer weiteren Kategorie Herausforderungen hinsichtlich des fachlichen Selbstkonzeptes expliziert werden. Das Selbstkonzept der fachfremd Studierenden war häufig eher negativ geprägt. Aussagen wie *„[ich bin] als Schüler schon immer schwach in Mathe gewesen oder [habe] dies zumindest vermittelt bekommen und fühle mich dadurch nicht wirklich kompetent dies zu unterrichten*“ spiegeln die Unsicherheit wider. Zusätzlich wurde die Sorge geäußert, in herausfordernden Unterrichtssituationen – wie im selbsterlebten Mathematikunterricht schnell an die eigene Frustrationsgrenze zu stoßen.

Nach Abschluss der Module zeigten sowohl die Rückmeldungen der Studierenden als auch die Darstellungen in den Portfolios beeindruckende Ergebnisse. Aussagen wie *„durch den Praxisbezug ist das Modul sehr anwendungsbezogen, lehrreich und regt zur Mitarbeit an“* oder *„insbesondere die detaillierte Bearbeitung während des Moduls [...] hat dazu beigetragen, dass der Lernerfolg als so hoch eingeschätzt wurde“* verdeutlichen, dass die Studierenden die vielfältigen Erfahrungen sehr positiv wahrgenommen haben. Auch die Erläuterung *„die praxisnahe Erarbeitung der Inhalte und das eigene Ausprobieren des Diagnoseinstruments halte ich für sehr zielführend zur Erarbeitung sowie Sicherung der Thematik“* hebt die wahrgenommene Bedeutung der Verzahnung von Theorie und Praxis für den Lernprozess hervor. In den Lernergebnissen der Studierenden wird deutlich, dass eine sehr differenzierte Analyse der eigenständig erhobenen Schüler:innenleistungen vorgenommen wurde. In der Regel konnten die zentralen Stärken und Schwierigkeiten identifiziert werden, wobei die gemeinsam erarbeiteten Grundlagen für die Analyse der einzelnen Lösungen herangezogen wurden.

Die positive Entwicklung der Studierenden in Hinblick auf die diagnostischen Kompetenzen lässt sich aus den Dokumentationen der selbstgeführten Diagnoseinterviews ableiten. Bevor die Analysen erstellt wurden, wurden im Seminar die Aufgaben gelöst und die Schülerperspektiven eingenommen. Dabei wurden die Anforderungen und die Hürden der Aufgaben theoriebasiert herausgearbeitet (vgl. Philipp, 2018). Beispielhaft wird die Analyse an folgenden Ausschnitten aus einem Interview mit einer Schülerin zum Ende von Klasse zwei verdeutlicht:

I: Kannst du auch von 53 anfangen zu zählen und dann mal weiterzählen? K: <u>Dreiundvier</u>-äh: 53, (...), <u>54, 56</u>, 57, 58, 59, (.), 60, 61, 62, 63, 64.	I: Fang mal bei 84 an zu zählen. [...] K: 84? I: Ja. K: 85, 86, <u>87, 89</u>, 90, 91, 92, 93, 94, 95, 96, 97, <u>98, 100</u>.	I: Welche Zahl kommt nach der 56? K: (...) 57. I: Und vor der 56? K: Die <u>54.</u>

In der Analyse haben die Studierenden herausgestellt, dass die Schülerin einen sich *„stets wiederholenden Fehler mit den repetitiven Zahlen*“ aufweist.

Diese besondere Schwierigkeit wird innerhalb der Analyse zu den bestehenden Kompetenzen hinsichtlich des Zahlverständnisses und der Zählentwicklung im Zahlenraum bis 100 dargestellt. Anschließend erfolgt das Aufstellen einer Fehlerhypothese: „*Die inverse Sprech- und Schreibweise von Zahlen im Deutschen könnte [...] verantwortlich dafür sein, dass diese repetitiven Zahlen [...] im Sprachfluss ausgelassen werden*". Für das Überprüfen der Fehlerursachen haben die Studierenden in ihrer Förderplanung verschiedene Maßnahmen erarbeitet, die eine genauere Diagnose und gleichzeitige Förderung ermöglichen sollen.

Fazit und Ausblick

Für die zukünftige unterrichtliche Praxis der fachfremd Studierenden ist es von großer Bedeutung, dass sie ihre eigenen Selbstwirksamkeitskonzepte anpassen sowie ihre mathematikdidaktischen Fähigkeiten entwickeln und vertiefen. Dies kann im Kontext der diagnostischen Kompetenz noch stärker fokussiert werden, sodass die fachwissenschaftlichen Grundlagen vernetzend mit der Identifikation von Schüler:innenschwierigkeiten aufgebaut werden. Die fachdidaktische Wissensbasis kann die Grundlage für die Deutung der Schüler:innenlösungen bilden. Für den Aufbau des Moduls bedeutet dies beispielsweise, dass die Vernetzung zwischen dem Erkennen von Schwierigkeiten in Schüler:innenlösungen und den fachwissenschaftlichen und fachdidaktischen Grundlagen weiter gestärkt und unterstützt werden sollte. Auf diese Weise können die Studierenden ein strategisches Vorgehen (in Anlehnung an die Diagnoseschritte nach Philipp, 2018, vgl. Abschnitt 2.2) im Umgang mit Schüler:innenlösungen entwickeln, welches sie auch in der unterrichtlichen Praxis anwenden können. Parallel zur Entwicklung eines Lösungsansatzes mit der Benennung von relevanten Kompetenzen für die Bearbeitung der Aufgabe sollte auch das Erkennen von möglichen Hürden stärker reflektiert werden, um das Aufstellen einer Fehlerhypothese und das Überprüfen von möglichen Fehlerursachen stärker in den Blick zu nehmen. Neben der kontinuierlichen Weiterentwicklung der Module ist langfristig auch eine vertiefende Evaluation mit einem Schwerpunkt auf der Analyse der Strategien von Studierenden beim Diagnostizieren geplant.

Literaturverzeichnis

Bobis, J., Clarke, B., Clarke, D., Thomas, G., Wright, R., Young-Loveridge J. & Gould, P. (2005). Supporting teachers in the development of young children's mathematical thinking: Three large scale cases. *Mathematics Education Research Journal 16* (3), 27-57. https://doi.org/10.1007/BF03217400

Clarke, D. (2013). Understanding, assessing and developing children's mathematical thinking: task-based interviews as powerful tools for teacher professional learning. In A. M. Lindmeier & A. Heinze (Hrsg.), *Proceedings of the 37th Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education* (Bd. 1, S. 17–30). Kiel: PME.

Clarke, D., Clarke, B. & Roche, A. (2011). Building teachers' expertise in understanding, assessing and developing children's mathematical thinking: the power of task-based, one-to-one assessment interviews. *ZDM Mathematics Education 43*, 901–913. https://doi.org/10.1007/s11858-011-0345-2

Clarke, D., Roche, A. & Clarke, B. (2018). Supporting mathematics teachers' diagnostic competence through the use of one-to-one, task-based assessment interviews. In T. Leuders, K. Philipp & J. Leuders (Hrsg.), *Diagnostic competence of mathematics teachers: Unpacking a complex construct in teacher education and teacher practice* (Mathematics Teacher Education: Bd. 11, S. 173–192). Springer.

Dingemans, S. (2024). *Entwicklung mathematikspezifischer diagnostischer Kompetenz im Praxissemester von Studierenden im Lehramt Grundschule.* Springer.

Eichler, A., Rathgeb-Schnierer, E. & Volkmer, J. P. (2023). Das Beurteilen von Lernprodukten als Facette diagnostischer Kompetenz fördern. *Journal für Mathematikdidaktik, 44* (1), 29-58. https://doi.org/10.1007/s13138-022-00216-8

Flottmann, N.-C., Streit-Lehmann, J. & Peter-Koop, A. (2021). *Elementar-Mathematisches BasisInterview Zahlen und Operationen. Handbuch Diagnostik.* Mildenberger.

Leuders, T., Dörfler, T., Leuders, J. & Philipp, K. (2018). Diagnostic Competence of Mathematics Teachers: Unpacking a Complex Construct. In T. Leuders, K. Philipp, J. Leuders (Hrsg.), *Diagnostic Competence of Mathematics Teachers: Unpacking a Complex Construct in Teacher Education and Teacher Practice.* (Mathematics Teacher Education: Bd. 11, S. 3-32). Springer. https://doi.org/10.1007/978-3-319-66327-2

Leuders, T., Loibl, K., Sommerhoff, D., Herppich, S. & Praetorius, A.-K. (2022). Toward an Overarching Framework for Systematizing Research Perspectives on Diagnostic Thinking and Practice. *Journal für Mathematikdidaktik. 43* (1), 13-38. https://doi.org10.1007/s13138-022-00199-6

Niedersächsisches Kultusministerium (2024). Verordnung über Masterabschlüsse für Lehrämter in Niedersachsen (Anhörfassung) (Nds. MasterVO-Lehr). https://www.mk.niedersachsen.de/download/203930/Verordnung_ueber_Masterabschluesse_fuer_Lehraemter_in_Niedersachsen_Nds._MasterVO-Lehr_.pdf.

Ostermann, A., Leuders, T., Philipp, K. (2019). Fachbezogene diagnostische Kompetenzen von Lehrkräften – Von Verfahren der Erfassung zu kognitiven Modellen zur Erklärung, S. 93-116. In T. Leuders, M. Nückles, S. Mikelskis-Seifert & K. Philipp (Hrsg.), *Pädagogische Professionalität in Mathematik und Naturwissenschaften.* Springer.

Peter-Koop, A & Grüßing, M. (2006). Zur Diagnostik von Lernausgangslagen im Mathematikunterricht. *PÄD-Forum: unterrichten erziehen 34*(2), 103-106.

Peter-Koop, A., Wollring, B., Spindeler, B. & Grüßing, M. (2007). *ElementarMathematisches BasisInterview.* Mildenberger.

Philipp, K. (2018). Diagnostic competences of mathematics teachers with a view to processes and knowledge resources. In T. Leuders, K. Philipp & J. Leuders (Hrsg.), *Diagnostic competence of mathematics teachers: Unpacking a complex construct in teacher education and teacher practice* (Mathematics Teacher Education: Bd. 11, S. 109-127). Springer.

Philipp, K. (2023). Diagnostische Kompetenz von Mathematiklehrkräften. Einblick in verschiedene Forschungsperspektiven. In A. S. Steinweg (Hrsg.), *Grundlegende Kompetenzen sichern. Lernende und Lehrende im Blick. Tagungsband des AK Grundschule in der GDM 2023* (Band 12, S. 9 -24). https://doi.org/10.26041/fhnw-9019

Porsch, R. (2020). Mathematik fachfremd unterrichten, S. 3-26. In R. Porsch, & B. Rösken-Winter (Hrsg.), *Professionelles Handeln im fachfremd erteilten Mathematikunterricht. Empirische Befunde und Fortbildungskonzepte.* Springer.

Rjosk, C., Hoffmann L., Richter, D., Marx, A. & Gresch, C. (2017). Qualifikation von Lehrkräften und Einschätzungen zum gemeinsamen Unterricht von Kindern mit und Kindern ohne sonderpädagogischen Förderbedarf. In P. Stanat. S. Schipolowski, C. Rjosk, S. Weirich & N. Haag, (Hrsg.), *IQB-Bildungstrend 2016. Kompetenzen in den Fächern Deutsch und Mathematik am Ende der 4. Jahrgangsstufe im zweiten Ländervergleich* (S. 335-354). Waxmann.

Streit-Lehmann, J., Flottmann, N.-C. & Peter-Koop A., (2022) *ElementarMathematisches BasisInterview. Zahlen und Operationen. Handbuch Förderung*. Mildenberger.

Weinert, F. E. (1998). Vermittlung von Schlüsselqualifikationen. In S. Matalik & D. Schade (Hrsg.), *Entwicklungen in Aus- und Weiterbildung. Anforderungen, Ziele, Konzepte* (S. 23–43). Nomos.

Wollring, B., Peter-Koop, A., Haberzettl, N., Becker, N. & Spindeler, B. (2011). *ElementarMathematisches BasisInterview. Größen und Messen, Raum und Form.* Mildenberger.

Wollring, B., Peter-Koop, A. & Grüßing, M. (2013): Das ElementarMathematische BasisInterview EMBI. In M. Hasselhorn, A. Heinze, W. Schneider & U. Trautwein (Hrsg.), *Diagnostik mathematischer Kompetenzen* (Tests und Trends: N.F., Band 11, S. 81-96). Hogrefe.

Teil III

Mathematische Basiskompetenzen in der Schul- und Unterrichtspraxis

Förderorientierte Diagnostik und diagnosebasierte Förderung im mathematischen Anfangsunterricht

Jana Schiffer, Janina Lenhart, Marcus Nührenbörger, Larissa Aust, Andrea Baldus, Luise Eichholz, Celine Linker & Ben Weiß

Abstract

Gerade im mathematischen Anfangsunterricht hat Diagnose und Förderung aufgrund der heterogenen Lernausgangslagen und des Einflusses von Lernschwierigkeiten auf das weitere Lernen eine besonders hohe Relevanz. Um Lehrkräfte bei diesen Herausforderungen zu unterstützen, hat sich das Konzept des Formativen Assessments (FA) als wirksam erwiesen. Im Projekt „Förderorientierte Diagnostik im inklusiven mathematischen Anfangsunterricht" (FÖDIMA) wurden in drei Projektphasen zwei unterschiedliche Formalisierungsgrade von FA („curriculum-embedded assessment" (CE) vs. „planned-for-interaction assessment" (PI)) in einem Fortbildungskonzept mit entsprechendem Material umgesetzt, vergleichend evaluiert, revidiert und zu einem Qualifizierungsprogramm für Multiplikator:innen weiterentwickelt. Es zeigten sich leichte Vorteile des stärker strukturierten Ansatzes CE bei der Leistungsentwicklung der Schüler:innen (nicht signifikant) sowie der Handlungssicherheit der Lehrkräfte (signifikant) und leichte, signifikante Vorteile des flexibleren Ansatzes PI bei der kognitiven Motivation der Kinder. Zudem trug der Ansatz PI zu einer stärkeren Verstehens- und Prozessorientierung auf Seiten der Lehrkräfte bei. Auf Basis dieser Ergebnisse wurde das Konzept der Veranstaltungen und Materialien überarbeitet und beide Ansätze wurden zu einer verzahnten Maßnahme aus CE und PI kombiniert.

Mathematischer Anfangsunterricht, Formatives Assessment, Standortbestimmungen, Diagnosegespräche, Lehrkräfteprofessionalisierung

Einleitung

Der arithmetische Anfangsunterricht ist durch stark heterogene mathematische Lernausgangslagen der Kinder zu Schulbeginn geprägt (Hasemann & Gasteiger, 2014). Gleichzeitig spielt er eine zentrale Rolle für die Entwicklung grundlegender mathematischer Kompetenzen und die Vermeidung sich manifestierender Lernschwierigkeiten (Gaidoschik et al., 2021; Häsel-Weide & Nührenbörger, 2013). Für Lehrkräfte stellt es eine besondere Herausforderung dar, diesen Faktoren angemessen zu begegnen (Faix et al., 2023; Hasemann & Gasteiger, 2014). Die Fähigkeit, gezielt zu diagnostizieren und zu fördern, gilt daher als Schlüsselkompetenz für einen fachlich tragfähigen Mathematikunterricht (Moser Opitz & Nührenbörger, 2023).

Ein mögliches und wirksames Konzept zur Förderung schulischen Lernens stellt das *Formative Assessment (FA)* dar, bei dem diagnostische Informationen zur Leistung von Kindern lernprozessbegleitend erhoben und zur Verbesserung des Unterrichts und des individuellen Lernens genutzt werden (Black & Wiliam, 2009; Schütze et al., 2018). Die erfolgreiche Umsetzung wird jedoch als herausfordernd und abhängig von der konkreten Gestaltung beschrieben. Zur Implementation werden Materialien und Unterstützungsmöglichkeiten für Lehrkräfte benötigt (Schütze et al., 2018).

In diesem Beitrag soll zunächst theoretisch hergeleitet werden, inwiefern Diagnose und Förderung durch FA realisiert und wie Lehrkräfte bei der Implementation in der Praxis unterstützt werden können. Anschließend sollen Ziele, erarbeitete Materialien und Ergebnisse des Projekts *Förderorientierte Diagnostik im inklusiven mathematischen Anfangsunterricht (FÖDIMA)* vorgestellt werden, in welchem ein Qualifizierungsprogramm für Lehrkräfte und Multiplizierende entwickelt, erprobt, evaluiert und disseminiert wird.

Formatives Assessment zur förderorientierten Diagnostik und diagnosebasierten Förderung

Als grundlegende Merkmale von FA werden „die Klärung von Lernzielen, die Diagnose der individuellen Leistung sowie eine darauf basierende Rückmeldung und Förderung“ (Schütze et al., 2018, S. 697) beschrieben. Im Unterschied zum *Summativen Assessment* geht es bei FA nicht um eine Beurteilung, sondern um eine Verbesserung des Lernens (Schütze et al., 2018). Es kann durch unterschiedliche Planungs- und Formalisierungsgrade umgesetzt werden: Dabei können das spontane *on-the-fly assessment*, das vorab für Unterrichtssequenzen geplante *planned-for-interaction assessment (PI)* und das stärker formalisierte und curricular eingebettete *curriculum-embedded assessment (CE)* unterschieden werden (Shavelson et al., 2008). Die jeweilige Diagnostik kann durch unterschiedliche Werkzeuge realisiert werden (Gaidoschik et al., 2021), von denen im Folgenden Diagnosegespräche und Standortbestimmungen in den Blick genommen werden.

Ein Diagnosegespräch lässt sich in Anlehnung an ein diagnostisches Interview als halbstandardisiertes Verfahren beschreiben, in dem die Lehrkraft durch adäquate Fragen und Impulse bei gleichzeitiger bewusster Zurückhaltung die Denk- und Handlungsweisen von Kindern zu verstehen versucht (Selter & Spiegel, 1997). Es charakterisiert sich durch Interaktivität und Flexibilität und lässt sich dem Ansatz PI zuordnen. Essentieller Bestandteil ist dabei die vorbereitende Planung, in der die Lehrkraft sich mit möglichen diagnostischen Fragestellungen, Impulsen und Aufgaben auseinandersetzt sowie mögliche Schüler:innenantworten antizipiert.

Eine schriftliche Standortbestimmung lässt sich dem Ansatz CE zuordnen. Sie umfasst informative Aufgaben, die zentrale Kompetenzbereiche eines Themas abdecken und durch die individuelle Lernstände strukturiert und fokussiert an zentralen Punkten im Lehr-/Lernprozess erfasst werden können. Sie kann mit der gesamten Lerngruppe durchgeführt werden und steht als schriftliches Dokument dauerhaft zur Verfügung (Sundermann & Selter, 2006). Bei erneuter Durchführung zu einem späteren Zeitpunkt können individuelle Lernverläufe sichtbar gemacht werden.

Unabhängig von der Art der Diagnostik sollte eine anschließende adaptive Förderung diagnosegleitet, verstehensorientiert und kommunikationsfördernd angelegt sein. Dies bedeutet, dass sich eine Förderung am Vorwissen der Kinder beim kumulativen Wissensaufbau orientiert, dass das Verständnis mathematischer Zusammenhänge die Basis für ein tragfähiges und nachhaltiges Wissen darstellt und dass mathematisches Wissen durch Aushandlungen und Begründungen von Erkenntnissen in kommunikativen Prozessen entwickelt wird (Hußmann et al., 2014). Um die untrennbare Zusammengehörigkeit von Diagnostik und Förderung herauszustellen, wird auch von *förderorientierter Diagnostik* und *diagnosebasierter Förderung* gesprochen. Ohne den jeweils anderen Teil verbleibt eine Diagnostik wirkungslos und eine Förderung unspezifisch (Hußmann & Selter, 2013).

Implementation des formativen Assessments in der Praxis

Das Konzept FA kann Lehrkräften bei der Planung einer adäquaten individuellen Förderung helfen, indem Entscheidungen bei der Klärung der nächsten Lernschritte auf Basis diagnostischer Informationen fundiert werden. Die Implementation wird jedoch als herausfordernd beschrieben (Schütze et al., 2018). Gezielte Fortbildungsangebote für Lehrkräfte können eine effektive Unterstützung zur Umsetzung formativen Assessments darstellen, indem sie das fachdidaktische Wissen fördern. Dieses ist notwendig, damit Lehrkräfte zentrale Konzepte aufschlüsseln, passende Zugänge für alle Schüler:innen schaffen und den Unterricht entsprechend den diagnostizierten (Fehl-)Vorstellungen der Lernenden neu gestalten können (Lane et al., 2019).

Bei der Gestaltung von Fortbildungsangeboten haben sich konkrete materialbezogene Aktivitäten und zwischen den Veranstaltungen liegende Praxisphasen, in denen Unterricht durchgeführt und reflektiert wird, als förderlich erwiesen (Nührenbörger et al., 2025). Des Weiteren werden in der Lehrkräfteprofessionalisierungsforschung folgende Gestaltungsprinzipien für Fortbildungen herausgestellt: Kompetenzorientierung, Teilnehmendenorientierung, Lehr-Lern-Vielfalt, Reflexionsförderung, Fallbezug und Kooperationsanregung (Barzel & Selter, 2015). In der Implementationsforschung zählen die Kriterien Akzeptanz, Machbarkeit, Kosten, Angemessenheit, Wiedergabetreue, Durchdringung und Nachhaltigkeit einer Maßnahme als Indikatoren für eine erfolgreiche Implementation, wobei erstere Aspekte eher als Voraussetzung für die Umsetzbarkeit gelten und letztere Aspekte eher für die Langfristigkeit des Scaling-up bedeutsam sind (Souvignier, 2022). Um FA breitenwirksam zu implementieren, erscheinen Qualifizierungen von Multiplikator:innen als gewinnbringender Ansatz (Barzel & Selter, 2015).

Ziele und Forschungsdesign des FÖDIMA-Projekts

Das FÖDIMA-Projekt untersucht, wie Lehrkräfte und Multiplikator:innen gezielt qualifiziert werden können, um eine fachlich fundierte und förderorientierte Diagnostik im inklusiven arithmetischen Anfangsunterricht umzusetzen und wie Transferprozesse von der Theorie in die Praxis systematisch gestaltet werden können. Es gliedert sich in drei Phasen.

Projektphase 1

In Projektphase 1 wurden zwei Fortbildungskonzepte zu FA (CE und PI) erarbeitet. Diese wurden in der schulischen Praxis erprobt und vergleichend evaluiert. Die Umsetzung erfolgte mit Lehrkräften aus den Bezirksregierungen Arnsberg und Münster in jeweils zwei Gruppen. In der Gruppe CE setzten Lehrkräfte schriftliche Standortbestimmungen ein und werteten diese mithilfe von bereitgestellten Auswertungsbögen aus. In der Gruppe PI nutzten Lehrkräfte bereitgestellte Diagnoseaufgaben mit Beobachtungsaspekten und handlungsleitenden Impulsen als Grundlage für diagnostische Gespräche mit Lernenden. In beiden Gruppen wurden die Instrumente durch passende Förderanregungen ergänzt.

Für beide Konzepte wurden jeweils sechs i. d. R. dreistündige Fortbildungsveranstaltungen konzipiert, durchgeführt und evaluiert. Insgesamt nahmen 125 Lehrkräfte aus 37 Schulen an den Veranstaltungen teil. Die inhaltliche Gestaltung der Fortbildungen umfasste als zentrale Themen der Arithmetik in der Schuleingangsphase den Aufbau und die Sicherung von Vorstellungen und Einsichten über Zahlen, Stellenwerte und Operationen im Zahlenraum bis 100. Denn diese stellen die arithmetischen Basiskompetenzen dar, die für ein langfristig tragfähiges Verständnis von Mathematik unverzichtbar sind (SWK, 2022; Häsel-Weide & Nührenbörger, 2025). Neben dem fachlichen Fokus wurde der FA-Ansatz unter Rückgriff auf

Materialien und Ergebnisse des Projektes GLUE (Nührenbörger et al., 2025) durch diagnostische und förderbezogene Themen, wie diagnosegeleitetes Fördern, Nutzung von Darstellungsmitteln, Adaptation von Aufgaben, Anregung von Austausch und Rückmeldungen geben vertieft. Zwischen den Veranstaltungen führten die Lehrkräfte konkrete Praxiserprobungen in ihrem Unterricht durch. Diese wurden gemeinsam geplant und in den darauffolgenden Treffen reflektiert, um den Transfer zu unterstützen.

Auf Ebene der Lehrkräfte wurden im Prä-Post-Design das selbstberichtete Assessmentverhalten und in prozessbegleitenden Evaluationen die Implementationsvariablen Akzeptanz, Machbarkeit, Wiedergabetreue, Kooperation, wahrgenommener Lernerfolg der Lernenden und Identifikation sowie abschließend Verständnis, Nachhaltigkeit und Auswirkungen erhoben. Die finale Stichprobe umfasste N = 118 Lehrkräfte der Jahrgangsstufen 1 und 2. Auf Ebene der Schüler:innen wurden im Prä-Post-Design basale Kompetenzen der Grundschulmathematik, die kognitive Motivation und das schulische Selbstkonzept erhoben. Die Stichprobe bestand aus N = 923 Kindern aus 41 Klassen des zweiten Jahrgangs.

Projektphase 2

In Projektphase 2 wurden die Ergebnisse genutzt, um die Veranstaltungen und Materialien zu überarbeiten und zur Förderung eines langfristigen Scaling-ups zu einer Qualifizierungsmaßnahme für Multiplikator:innen weiterzuentwickeln.

Projektphase 3

Projektphase 3 begann im Juni 2024. Es wurden ca. 100 Fachberatende im Rahmen der Fachoffensive Mathematik Nordrhein-Westfalen in sechs dreistündigen Veranstaltungen zu Multiplikator:innen für das überarbeitete FA-Konzept qualifiziert, die die revidierte Veranstaltungsreihe mit Lehrkräften in sechs Netzwerktreffen durchführten. Auf Ebene der Multiplikator:innen wurden Selbstwirksamkeit, fortbildungsfachdidaktisches Wissen, berufliches Selbstverständnis und Innovationsbereitschaft sowie Akzeptanz, Verständnis, Machbarkeit, Identifikation, Vermittelbarkeit des Konzepts und Vorbereitung auf den Multiplikationsprozess erhoben. Auf Ebene der Lehrkräfte erfolgten analoge Erhebungen zur ersten Projektphase. Somit können Transfervariablen zwischen den Projektphasen 1 und 3 verglichen werden.

Ergebnisse der Projektphase 1

In den prozessbegleitenden Evaluationen auf Ebene der Lehrkräfte zeigte sich die Akzeptanz und Identifikation mit dem Konzept in beiden Gruppen als besonders hoch ausgeprägt, während die Angaben für Machbarkeit und Kooperation eher im mittleren Bereich der Bewertungsskala lagen. Insgesamt wurde der Ansatz CE besser bewertet. In der abschließenden Evaluation gaben die Lehrkräfte beider Gruppen ein hohes Verständnis des Konzeptes an und berichteten, dass sie dieses langfristig im Unterricht umsetzen wollen. Der Ansatz CE bewirkte eine selbstberichtete stärkere Auswirkung auf das Handeln der Lehrkräfte, z. B. bezüglich der Handlungssicherheit oder der Kompetenzerweiterung im Bereich der Mathematikförderung. Die Daten deuten auf eine verstärkte Nutzung der drei Assessmentmethoden Beobachtungen, schriftliche Dokumente und Gespräche beider Gruppen nach der Veranstaltungsreihe hin, wobei diese Veränderungen (meist) nicht signifikanten waren. Die Teilnehmenden berichteten in Interviews, dass der Ansatz CE sich zeitlich und personell ressourcenschonender im Unterricht umsetzen lasse und insgesamt klarer strukturiert sei. Gleichzeitig würden die Denkwege der Kinder nicht immer durch die schriftlichen Dokumente deutlich, wodurch die Lehrkräfte Vorteile im Ansatz PI sahen. Dieser sei stärker am Verständnis und dem Lernprozess orientiert und individueller anpassbar, bedeute aber auch einen höheren Zeitaufwand und stelle höhere Anforderungen an das fachdidaktische Wissen.

Bei der Evaluation auf Ebene der Schüler:innen zeigte sich bei der Gruppe CE eine leicht positivere Entwicklung der mathematischen Kompetenz als bei der Gruppe PI (nicht signifikant). Der Ansatz PI erwies sich jedoch für die kognitive Motivation als signifikant vorteilhafter. Das schulische Selbstkonzept blieb in beiden Gruppen gleich. Eine detailliertere Darstellung der Projektergebnisse wurde in Aust et al. (2025a/b) beschrieben.

Ergebnisse der Projektphase 2

Insgesamt konnte das Konzept formativen Assessments mit den im Projekt erarbeiteten Materialien und Veranstaltungen gut umgesetzt werden: Sowohl die Nutzung von Standortbestimmungen als auch die Durchführung diagnostischer Gespräche im Unterricht können als gelungen angesehen werden. Beide Assessmentmethoden zeigten spezifische Vor- und Nachteile und wurden in der Revisionsphase kombiniert, um sie flexibel und situationsspezifisch gewinnbringend im Unterricht nutzen zu können. Auf Materialebene bedeutet dies, dass die Standortbestimmungen und die Diagnose- und Förderkartei so aufeinander abgestimmt wurden, dass für jeden Inhalt flexibel die Art der Diagnostik entschieden und aufeinander bezogen werden kann.

Die Veranstaltungsreihe wurde so überarbeitet, dass der als leichter implementierbar erscheinende Ansatz CE als Einstieg in das Konzept FA in den ersten Veranstaltungen mit den Lehrkräften thematisiert wird, um im Verlauf auch den Ansatz PI zeitlich versetzt einzubeziehen und die Vor- und Nachteile beider Assessmentmethoden erfahrbar zu machen.

Einblick in die revidierten FÖDIMA-Materialien

Die FÖDIMA-Materialien umfassen Diagnose- und Fördermaterialien und zugehörige Hinweise zu den arithmetischen Basiskompetenzen in den inhaltlichen Bereichen Zahlverständnis im Zahlenraum 20 und 100, Addition und Subtraktion im Zahlenraum 20 und 100 sowie Multiplikation und Division im Zahlenraum 100. Alle Diagnoseaufgaben sind in ähnlicher Form als Standortbestimmung und als diagnostische Basisaufgabe für Gespräche aufbereitet so dass die Lehrkraft die Vorteile situationsspezifisch nutzen kann.

Die schriftlichen Standortbestimmungen enthalten mehrere Aufgaben eines Kompetenzbereiches und können flexibel zusammengestellt werden. Eine Aufgabenübersicht, in der die angesprochenen Kompetenzen und mögliche Beobachtungen aufgeführt sind, unterstützt die Lehrkräfte bei der Auswertung. In Abbildung 1 ist beispielhaft die Aufgabe *Einfache Aufgaben rechnen* aus dem Bereich Addition im Zahlenraum bis 20 dargestellt. Die Lehrkraft erhält in diesem Beispiel diagnostische Informationen darüber, welche Aufgaben (ggf. welcher Struktur) die Kinder richtig lösen können und welche sie als einfach erachten. Sie kann außerdem beobachten, bei welchen Aufgaben (ggf. systematische) Fehler entstehen.

Löse die Aufgaben. Kreise die einfachen Aufgaben ein.

4 + 1 = ___	6 + 5 = ___
7 + 10 = ___	7 + 7 = ___
3 + 3 = ___	6 + 4 = ___
9 + 3 = ___	5 + 8 = ___

Abb. 1: Standortbestimmungsaufgabe „Einfache Aufgaben rechnen“

Die diagnostischen Basisaufgaben für Gespräche werden den Lehrkräften in Form der FÖDIMA-Kartei bereitgestellt. Jede Karteikarte enthält neben der Aufgabenstellung eine Übersicht der Kompetenzen, die erfasst werden können, sowie Beobachtungshinweise, die die Aufmerksamkeit der Lehrkraft auf verschiedene Teilkompetenzen lenken. Zusätzlich stehen der Lehrkraft Impulse zur Verfügung, die das Nachdenken der Schüler:innen anregen, als Hilfestellung dienen oder eine weiterführende Diagnostik ermöglichen. Das Diagnosegespräch kann innerhalb eines Unterrichtsgesprächs mit der ganzen Klasse, in einer Kleingruppe oder individuell mit einzelnen Kindern stattfinden. In der Auseinandersetzung mit der diagnostischen Basisaufgabe *Einfache Aufgaben rechnen* (s. Abb. 2) ergibt sich z. B. die Möglichkeit, dass das Kind im Vergleich zur Standortbestimmungsaufgabe zusätzlich erklären kann, wie es eine Aufgabe gelöst hat, warum es eine Aufgabe einfach findet und welche Aufgaben ähnlich sind. Die Lehrkraft kann an die Äußerungen der Lernenden direkt anknüpfen, gezielter nachfragen und bekommt so tiefere diagnostische Einblicke in die Denkwege im Lösungsprozess.

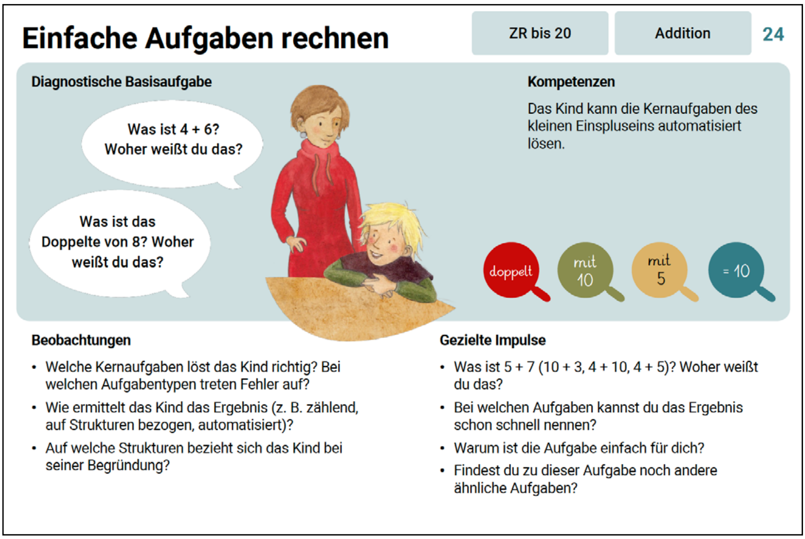


Abb. 2: Diagnostische Basisaufgabe „Einfache Aufgaben rechnen“ mit Hinweisen

Um eine hohe Passung zwischen Diagnose und Förderung sicherzustellen, erhalten die Lehrkräfte auf der Rückseite der jeweiligen FÖDIMA-Karteikarte Förderhinweise, die sich auf die gemeinsamen Kompetenzen der Standortbestimmungsaufgaben und diagnostischen Basisaufgaben beziehen (s. Abb. 3). Sie eignen sich für den Einsatz im Klassenverband, können aber auch für Kleingruppen oder eine individuelle Förderung adaptiert werden.

Abb. 3: Förderanregungen „Einfache Aufgaben rechnen“

Alle im Projekt entwickelten Materialien sind auf der Seite https://pikas.dzlm.de/node/2558 frei verfügbar. Die FÖDIMA-Kartei und eine zugehörige Handreichung, die den Einsatz des FÖDIMA-Materials im Unterricht erläutert und Einblick in fachdidaktische Grundlagen gibt, wurden zu Beginn des Schuljahres 2024/2025 allen Schulen mit Primarstufe in Nordrhein-Westfalen in zweifacher Ausfertigung zur Verfügung gestellt. Die Kartei bündelt Diagnose- und Förderaufgaben wie auch entsprechende weiterführende Anregungen zu den wesentlichen arithmetischen Basiskompetenzen in der Schuleingangsphase. Des Weiteren wurde eine FÖDIMA-App entwickelt, in der Aufgaben, Beobachtungshinweise, Impulse und Förderanregungen der Materialien integriert sind und die Diagnose- und Förderaktivitäten durch Hintergrundwissen unterstützt.

Fazit und Ausblick

Das Projekt FÖDIMA trägt durch die Entwicklung von Unterrichtsmaterialien und die Qualifizierung von Multiplikator:innen zur Professionalisierung von Lehrkräften im Bereich Diagnostik und Förderung mathematischer Basiskompetenzen in der Grundschule auf Grundlage des FA bei. Es beforscht weiter die Bedingungen einer erfolgreichen Implementation.

Förderhinweis

Dieses Projekt wird aus Mitteln des Bundesministeriums für Bildung und Forschung unter den Förderkennzeichen 01NV2102A und 01NV2102B gefördert. Die Verantwortung für den Inhalt dieser Veröffentlichung liegt bei den Autor:innen.

Literaturverzeichnis

Aust, L., Schiffer, J., Lenhart, J., Eichholz, L., Giesen, A., Linker, J.-C., Nührenbörger, M., Selter, C., Souvignier, E. & Weiß, B. (2025a). Das Projekt FÖDIMA – Förderorientierte Diagnostik iminklusiven mathematischen Anfangsunterricht In K. Beck, R. A. Ferdigg, D. Katzenbach, J. Klett-Hauser, S. Laux, M. Urban (Hrsg.), *Förderbezogene Diagnostik in der inklusiven Bildung. Bd. 1* (S. 169-188). Waxmann.

Aust, L., Linker, J.C., Eichholz, L., Schiffer, J., Nührenbörger, M., Selter, Ch. & Souvignier, E. (2025b). How much formalization of assessment methods is useful when implementing formative assessment in second grade mathematics classrooms? *Contemporary Educational Psychology, (online first).* https://doi.org/10.1016/j.cedpsych.2025.102376.

Barzel, B., & Selter, C. (2015). Die DZLM-Gestaltungsprinzipien für Fortbildungen. *Journal für Mathematik-Didaktik, 36*(2), 259–284.

Black, P., & Wiliam, D. (2009). Developing the theory of formative assessment. *Educational Assessment, Evaluation and Accountability, 21*(1), 5–31.

Faix, A.-C., Peter-Koop, A., & Wild, E. (2023). Diagnostik, Förderung und Beratung bei Rechenschwäche. *Herausforderung Lehrer*innenbildung,* 130–145. https://doi.org/10.11576/HLZ-6027.

Gaidoschik, M., Moser Opitz, E., Nührenbörger, M., & Rathgeb-Schnierer, E. (2021). Besondere Schwierigkeiten beim Mathematiklernen. *Special Issue der Mitteilungen der Gesellschaft für Didaktik der Mathematik,* 47. https://ojs.didaktik-der-mathematik.de/index.php/mgdm/issue/view/46

Häsel-Weide, U. & Nührenbörger, M. (2013). Fördern im Mathematikunterricht. In H. Bartnitzky, U. Hecker & M. Lassek (Hrsg.), *Individuell fördern – Kompetenzen stärken ab Klasse 3, Bd. 2* (S. 9–60). AK GS.

Häsel-Weide, U., & Nührenbörger, M. (2025). Unterrichtsintegrierte Förderung von mathematischen Basiskompetenzen. *Zeitschrift für Grundschulforschung, 18,* 49–66.

Hasemann, K., & Gasteiger, H. (2014). *Anfangsunterricht Mathematik* (3. Aufl.). Springer.

Hußmann, S., Nührenbörger, M., Prediger, S., Selter, C., & Drüke-Noe, C. (2014). Schwierigkeiten in Mathematik begegnen. *Praxis der Mathematik in der Schule, 56*(56), 2–8.

Hußmann, S., & Selter, C. (2013). *Diagnose und individuelle Förderung in der MINT-Lehrerbildung: Das Projekt dortMINT.* Waxmann.

Lane, R., Parrila, R., Bower, M., Bull, R., Cavanagh, M., Forbes, A., Jones, T., Khosronejadtoroghi, M., Leaper, D., Pellicano, L., Powell, S., Ryan, M., & Skrebneva, I. (2019). *Literature review: Formative assessment evidence and practice.* Australian Institute for Teaching and School Leadership (AITSL). https://www.lpofai.edu.au/reports/

Moser Opitz, E., & Nührenbörger, M. (2023). Diagnose und Förderung. In R. Bruder, A. Büchter, H. Gasteiger, B. Schmidt-Thieme, & H.-G. Weigand (Hrsg.), *Handbuch der Mathematikdidaktik* (S. 597–618). Springer.

Nührenbörger, M., Wember, F. B., Wollenweber, T., Frischemeier, D., Korten, L., & Selter, C. (2025). Development of teachers' attitudes and self-efficacy expectations for inclusive mathematics instruction. *Journal of Mathematics Teacher Education 28,* 151–177.

Schütze, B., Souvignier, E., & Hasselhorn, M. (2018). Stichwort – Formatives Assessment. *Zeitschrift für Erziehungswissenschaft, 21*(4), 697–715.

Selter, C., & Spiegel, H. (1997). *Wie Kinder rechnen.* Klett.

Shavelson, R. J., Young, D. B., Ayala 1, C. C., Brandon, P. R., Furtak, E. M., Ruiz-Primo, M. A., Tomita, M. K., & Yin, Y. (2008). On the Impact of Curriculum-Embedded Formative Assessment on Learning. *Applied Measurement in Education,* 21(4), 295–314.

Souvignier, E. (2022). Interventionsforschung im Kontext Schule. In T. Hascher, T.-S. Idel, & W. Helsper (Hrsg.), *Handbuch Schulforschung* (S. 219–235). Springer.

Sundermann, B., & Selter, C. (2006). *Beurteilen und Fördern im Mathematikunterricht der Grundschule.* Cornelsen.

Förderung von Basiskompetenzen im inklusiven Mathematikunterricht mit dem EMBI

Nina Flottmann & Julia Streit-Lehmann

Abstract

Lehrkräfte stehen im Mathematikunterricht der Primarstufe großen Herausforderungen gegenüber, die wesentlich durch verschiedene Heterogenitätsdimensionen bedingt sind. Leistungsheterogenität erfordert eine hohe diagnostische Kompetenz der Lehrkräfte, um jedem Kind Lernangebote machen zu können, die zu seinem aktuellen Leistungsstand passen. Ein Beispiel, wie eine gelingende Förderarbeit im inklusiven mathematischen Anfangsunterricht mit Fokus auf die Basiskompetenzen umgesetzt werden kann, wird in diesem Beitrag nachgezeichnet. Zunächst werden dazu Kennzeichen eines guten inklusiven Mathematikunterrichts vorgestellt, die als Ausgangspunkt für weitere Überlegungen zur Planung erfolgreicher Förderarbeit dienen. Anschließend wird das *ElementarMathematische BasisInterview*, kurz: EMBI, vorgestellt, an dessen Adaption für den deutschsprachigen Raum Andrea Peter-Koop in den 2000er Jahren beteiligt war (Peter-Koop, Wollring, Grüßing & Spindeler, 2007, 2013) und das nun in einer überarbeiteten Neuauflage vorliegt (Flottmann, Streit-Lehmann & Peter-Koop, 2021). Am konkreten Beispiel eines Förderkonzeptes eines Grundschulverbundes in Ostwestfalen-Lippe werden dessen Einsatzmöglichkeiten anschaulich aufgezeigt und in diesem Zusammenhang Bezüge zum *response-to-intervention-Modell* hergestellt (Reschley & Bergstrom, 2009), welches einen systematisch gestuften Ansatz zur Unterrichts- und Förderarbeit auf Basis einer regelmäßigen Lernverlaufsdiagnostik propagiert.

Inklusion, Förderung, inklusiver Mathematikunterricht, EMBI, Basiskompetenzen

Theoretische Rahmung

Im Folgenden werden die Kennzeichen guten inklusiven Mathematikunterrichts und das RTI-Modell vorgestellt. Im Anschluss werden einige mathematische Vorläuferfähigkeiten als Basiskompetenzen identifiziert, deren Erhebung mit dem EMBI möglich ist. Auf dieser theoretischen Grundlage werden dann Eindrücke aus der schulischen Praxis verortet.

Kennzeichen guten inklusiven Mathematikunterrichts

(Inklusiver) Unterricht zielt darauf ab, „die optimale Förderung jedes einzelnen Kindes zu gewährleisten und dabei die Vielfalt der Lerngruppe wertzuschätzen, wobei diese zugleich als Ressource für das Lernen des Einzelnen genutzt werden soll“ (Korff, 2015b, S. 1). Um dieses Ziel zu erreichen, bedarf es eines Unterrichts, der sich zum Ziel gemacht hat, die Kinder individuell gemäß ihrem Leistungsstand zu fördern und dabei zugleich ebendiese vielfältigen Unterschiedlichkeiten als Normalfall (vgl. Prengel, 1995) anzunehmen. Zudem sind alle Facetten der Diversität zu berücksichtigen und zu nutzen (vgl. Flottmann, 2024, S. 39).

Die Gestaltung guten Unterrichts ist sowohl in der allgemeinen Didaktik als auch im Fachunterricht ein wichtiges und durchgängig aktuelles Thema. Für den inklusiven Fachunterricht müssen die Ansprüche an das Fach mit den Lernausgangslagen der Schüler:innen in Beziehung gesetzt werden (vgl. Werner, 2019, S. 15). Die Dimensionen der Schul- und Unterrichtsentwicklung und die zugewiesenen Aufgaben auf Basis des Index für Inklusion (vgl. Boban & Hinz, 2003) sind in Abbildung 1 anschaulich dargestellt.

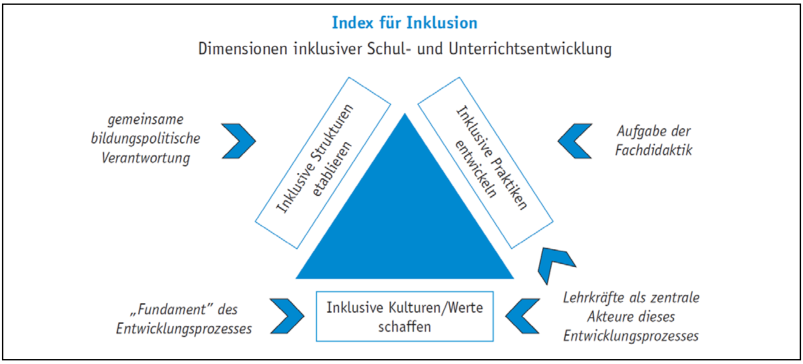


Abb. 1: Index für Inklusion (Peter-Koop, 2016, S. 4, weiterentwickelt in Anlehnung an Boban & Hinz, 2003)

Hieraus wird zudem die zentrale und nicht zu unterschätzende Rolle der Lehrkräfte als „die wichtigste Ressource“ (Peter-Koop, 2016, S. 5) deutlich, die bei der Umsetzung des gemeinsamen Lernens sowohl für die Unterrichtsgestaltung als auch für eine der Inklusion angemessene Umgebung Verantwortung tragen.

Für den inklusiven Unterricht allgemein sind international und national sehr umfangreiche Gelingensbedingungen zusammengestellt (vgl. z. B. Baumert & Vierbuchen, 2018; Booth & Ainscow, 2019; Meijer, 2003). Speziell für den inklusiven Mathematikunterricht lassen sich weitere fachspezifische Gelingensbedingungen eruieren, was in einer Zeit, in der sich in der

Schulpraxis eine doppelte Dialektik zwischen individueller Förderung und dem gemeinsamen Lernen entwickelt, zunehmend bedeutsamer erscheint. Rottmann und Peter-Koop (2015) schlagen vor: „So viel gemeinsam wie möglich, so individuell unterstützt wie nötig“ (ebd., S. 6).

Um alle Facetten der Schüler:innen in ihrer Vielfalt und Individualität wahrzunehmen und uneingeschränkte Teilhabe zu ermöglichen, werden u. a. vielfältige Differenzierungsformen genutzt (vgl. Schipper, 2016), Vorerfahrungen und Vorwissen einbezogen (vgl. Käpnick, 2016), die Lernenden im Sinne des aktiv-entdeckenden Lernens (vgl. Wittmann, 1995) aktiviert, besondere Hürden im Lernprozess berücksichtigt (vgl. Streit-Lehmann, Flottmann & Peter-Koop, 2022), mathematisches Verständnis sowie Kommunikation und Kooperation fokussiert (vgl. z. B. Götze, Selter & Zannetin, 2020) sowie konsequent die „Zone der nächsten Entwicklung“ (Vygotskij, 1978) als Ausgangspunkt für die inhaltliche Ausrichtung des Unterrichts festgelegt. Zu berücksichtigen ist gleichwohl die Fachsprache und die Ausgestaltung eines sprachsensiblen Mathematikunterrichts (vgl. z. B. Prediger, Götze, Steinbring, Tiedemann & Verboom, 2017). Es kommen gute, realitätsnahe Aufgaben zum Einsatz, die zwischen Wissen und Lebenswelt vermitteln (vgl. Benölken, 2016; Dexel, 2020), sowie Darstellungsmittel, die im Sinne des EIS-Prinzips nach Bruner (1972) unterschiedliche Darstellungsebenen berücksichtigen. Auf diese Weise werden im Mathematikunterricht sowohl inhalts- und prozessbezogene Kompetenzen gefördert (vgl. Hirt & Wälti, 2016).

Die o.g. doppelte Dialektik wird im Unterricht alltäglich sichtbar: Die Praxis zeigt, dass ein solcher Mathematikunterricht nicht immer ausreicht, allen Schüler:innen bei steigenden Klassengrößen mit allen individuellen Heterogenitätsfacetten und Lernausgangslagen gerecht zu werden. Hierfür bedarf es eines durchdachten, mehrstufigen und an die schulische Situation angepassten Förderkonzeptes. Je nach ihrem individuellem Unterstützungsbedarf bekommen die Schüler:innen unterschiedlich intensive Fördermaßnahmen (vgl. z. B. Gebhardt, Jungjohann & Schurig, 2021, S. 25).

Das response-to-intervention-Modell

Das in den USA weit verbreitete Modell *response-to-intervention*, kurz: RTI (Reschley & Bergstrom, 2009), ist ein Beispiel für ein mehrstufiges Fördersystem. Die einzelnen Stufen bilden drei Förderebenen, die als primäre, sekundäre und tertiäre Prävention bezeichnet werden (siehe Abbildung 2). Sie sind so unterteilt, dass der qualitativ hochwertige Klassenunterricht die Grundlage bildet und ggf. durch Kleingruppen- oder Einzelförderung ergänzt wird.

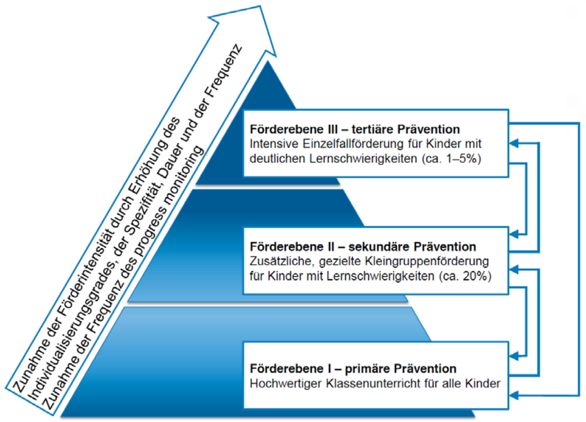


Abb. 2: Mehrebenenkonzeption im Rügener Inklusionsmodell (Blumenthal, Kuhlmann & Hartke, 2014, S. 71)

Der RTI-Ansatz zeigt, wie Unterrichts- und Förderarbeit auf mehreren Ebenen mit einer regelmäßigen Lernverlaufsdiagnostik gelingt (vgl. z. B. Blumenthal et al., 2014; Hartke & Diehl, 2013). Als *Rügener Inklusionsmodell* wurde es in Mecklenburg-Vorpommern adaptiert, um bei Schüler:innen mit Schwierigkeiten beim Lernen oder im Verhalten zu identifizieren und präventiv zu arbeiten, um länger andauernden Schwierigkeiten entgegenzuwirken (vgl. Sikora & Voß, 2018, 93 ff.). Wenngleich das System mit Abstufungen von Intensität und Spezifität präventiv als rahmengebendes Modell genutzt wird und auf die komplette Vermeidung von sonderpädagogischem Förderbedarf ausgelegt ist (vgl. ebd., S. 94 f.), muss auch auf die Kritik am RTI-Modell verwiesen werden, dass schwerere kognitive Beeinträchtigungen ausgeblendet werden, seine Anwendung bislang nur auf leichte Lernbehinderungen erfolgt und ein Stigmatisierungsrisiko nicht auszuschließen ist (s. Zusammenfassung von Limbach-Reich, 2021).

Mathematische Vorläuferfähigkeiten und Basiskompetenzen

Da in diesem Beitrag aus der Förderarbeit mit drei Kindern aus der ersten Klassenstufe berichtet wird, werden an dieser Stelle einige Kompetenzen umrissen, deren Erwerb zentrale Lernziele im arithmetischen Anfangsunterricht darstellen.

Bei Klein(st)kindern entwickeln sich das kardinale Mengenverständnis einerseits und die Einsicht in ordinale Rangfolgenkonzepte andererseits zunächst unabhängig voneinander (vgl. Krajewski & Ennemoser, 2013). Der Umgang mit Mengen, etwa der Mengenvergleich, basiert auf der Fähigkeit zu erfassen, aus wie vielen Objekten eine Menge besteht. Die simultane Mengenerfassung ist kein schneller Zählvorgang, sondern gelingt als vermutlich angeborene Kompetenz bereits Säuglingen in einem Zahlenraum bis 2 oder 3, Kindern und Erwachsenen bis maximal 4. Das schnelle Auffassen größerer Mengen erfolgt quasi-simultan, indem Teilmengen spontan wahrgenommen und dann mental zusammengesetzt werden (vgl. Benz, 2018). Um solche Mengen benennen zu können, stellt die Kenntnis von Zahlwörtern das notwendige Vokabelwissen dar. Die sichere Zuordnung von Zahlwörtern, später auch Zahlsymbolen, zu Mengen ist zweifellos eine artihmetische *Basiskompetenz*. Ordinale Rangfolgenkonzepte werden insbesondere im Kontext des Zählens entwickelt und ausgebaut.

Die Fähigkeit zur Verknüpfung kardinaler und ordinaler Kompetenzen stellt einen Meilenstein in der Zahlbegriffsentwicklung junger Kinder dar und wird typischerweise noch vor der Einschulung entwickelt; dies entspricht der Ebene 2 „einfaches Zahlverständnis" im Entwicklungsmodell der Zahl-Größen-Verknüpfung nach Krajewski & Ennemoser, 2013, S. 43. Die Entwicklung eines flexiblen Teil-Ganzes-Verständnisses und damit verbunden die Kenntnis aller Zerlegungen aller Zahlen bis 10 ist als zentrale Voraussetzung fürs Rechnen Lernen (vgl. Peter-Koop & Rottmann, 2013) ein Beispiel für die Verknüpfung kardinaler und ordinaler Zahlkonzepte und stellt somit ebenfalls eine wichtige arithmetische Basiskompetenz dar.

Das ElementarMathematische BasisInterview

Für das Feststellen der Lernausgangslage bzw. des aktuellen Kompetenzstandes eines Kindes bedarf es einer prozessorientierten Diagnostik (vgl. u.a. Scherer & Moser Opitz, 2010). Das EMBI basiert auf einem seit Ende der 1990er-Jahre in Australien eingesetzten, prozessorientierten Interviewverfahren. Das Interview wurde im *Early Numeracy Research Project* für 5- bis 8-jährige Kinder konzipiert und ist somit im vorschulischen Bereich und im Anfangsunterricht einsetzbar. Sowohl das australische Original als auch die die deutsche Adaption unterscheiden sich von anderen Diagnostikinstrumenten durch die materialgestützte Interviewführung, die Erfassung von mathematischen Vorläuferfähigkeiten, die Abbruchkriterien, die einer Überforderung entgegenwirken, und die Beschreibung der kindlichen Performanz in Form von Ausprägungsgraden (Peter-Koop, 2015, S. 157). Somit liegt mit dem EMBI ein für den schulischen und vorschulischen Einsatz konzipiertes Verfahren zur mathematischen Diagnostik und Lerndokumentation für alle Kinder einer Lerngruppe vor. Besonders durch das konsequent materialgestützte Vorgehen können auch Kinder, die sonderpädagogischen Förderbedarf oder noch wenig ausgebildete Sprachkompetenzen haben, zeigen, über welche mathematischen Fertigkeiten und Einsichten sie bereits verfügen. Für jedes Kind werden die „Zone der nächsten Entwicklung" (Vygotskij, 1978) aufgezeigt und gleichzeitig die besonderen Stärken, aber auch aktuelle Entwicklungs- und Unterstützungsbedarfe offengelegt. Das Handbuch Förderung (Streit-Lehmann et al., 2022) benennt zu den einzelnen Ausprägungsgraden der überprüften Bereiche (A: Zählen, B: Stellenwerte, C: Strategien bei Addition und Subtraktion, D: Strategien bei Multiplikation und Division, V: Vorläuferfähigkeiten) in der Praxis erprobte Förderideen, die gezielte Impulse für die Förderung dieser (Basis-)Kompetenzen liefern.

Einblicke in die Praxis

Auch für einige Kinder des o.g. Grundschulverbunds sind die fachlichen Hürden, die auf dem Weg des Rechnen Lernens zu überwinden sind, eine besondere Herausforderung, die sehr individuell erlebt wird (vgl. Peter-Koop, 2021, S. 191). In der Praxis dieses Grundschulverbunds zeigt sich, dass die Lernangebote im Klassenunterricht auch bei passgenauer Differenzierung nicht immer ausreichen, um den Schüler:innen angemessen gerecht zu werden. Daher ist gezielte Förderarbeit notwendig. Nach Abwägung der Kritikpunkte sowie seiner Vorteile, etwa die präventive Ausrichtung, wurde dazu das RTI-Modell als Rahmenmodell für die Organisation der Förderarbeit im mathematischen Anfangsunterricht gewählt. Auf diese Weise ist es möglich, ausgehend von den zu erwerbenden Basiskompetenzen, mit Hilfe von EMBI-Befunden die Förderziele für die Förderarbeit zu bestimmen und nach Durchführung eines Fördermoduls prozessorientiert zu überprüfen, wie erfolgreich die Förderarbeit war und welche weiteren didaktischen Konsequenzen daraus für das Kind abzuleiten sind.

Im Folgenden wird die Umsetzung dieses Ansatzes anhand dreier Schüler:innen dargelegt, die die Identifikation dreier Prototypen der Förderung erlaubt und somit aufzeigt, wie das RTI-Modell als rahmengebendes Fördermodell konkret genutzt werden kann.

Prototypische Kinder in verschiedenen Fördersituationen

Die drei Kinder sollen hier Aisha, Ben und Cedric heißen. Aisha und Ben befinden sich im ersten Schulbesuchsjahr, Cedric im zweiten Schulbesuchsjahr. Alle besuchen das zweite Halbjahr einer ersten Klasse. Die Kinder sind aufgrund verschiedener Beobachtungen durch die Lehrkraft und durch den Einsatz von Screeningverfahren aufgefallen und sollen dann im Anschluss an eine Diagnostik mit dem EMBI durch entsprechend geschulte Studierende eine passgenaue Förderung erhalten, die als Modul über acht Unterrichtsstunden angelegt ist, bevor eine erneute Überprüfung mit dem EMBI vorgesehen ist („Messzeitpunkt 2“). Die Auswertung liefert die jeweiligen Ausprägungsgrade („APG“) für die Bereiche Zählen (A), Stellenwerte (B), Addition und Subtraktion (C) und Multiplikation und Division (D). Die Entwicklungsverläufe der drei vorgestellten Kinder sind Tabelle 1 zu entnehmen.

	Ben		Aisha		Cedric	
	Messzeitpunkt 1	Messzeitpunkt 2	Messzeitpunkt 1	Messzeitpunkt 2	Messzeit-punkt 1	Messzeitpunkt 2
V-Teil	---	---	große Defizite	unauffällig	---	---
Teil A	APG A2	APG A5	APG A1	APG A2	APG A2	APG A3
Teil B	APG B1	APG B3	APG B1	APG B1	APG B1	APG B1
Teil C	APG C2	APG C5	APG C0	APG C2	APG C1	APG C2
Teil D	APG D0	APG D1	---	---	APG D0	APG D1

Tabelle 1: Ausprägungsgrade vor und nach dem 1. Fördermodul.

Eine genauere Betrachtung erlaubt die Identifikation dreier prototypischer Förder- und Entwicklungsverläufe.

1. **Prototyp**: Ben arbeitet im Unterricht auf einem mittlerem Lernniveau mit, zeigt aber vor Beginn der Förderarbeit leichte Lernschwierigkeiten, die das Erreichen des Regelstandards auf Basis der curricularen Vorgaben gefährden. Durch die temporäre Förderung im Fördermodul konnte er seine Kompetenzen in den überprüften Bereichen immens steigern und daraufhin erfolgreich auf sicherem mittleren bis guten Niveau im Mathematikunterricht der Klasse weiterarbeiten (Förderebene 1).

2. **Prototyp**: Bei Aisha liegen erste Lern- und Verständnisschwierigkeiten vor, die engmaschig beobachtet werden sollten. Aisha zeigt eine stetige Verbesserung in den überprüften Bereichen, wobei der Schwerpunkt der Förderarbeit im Bereich der Vorläuferfähigkeiten zu verorten ist. Für diesen Bereich sind im EMBI keine Ausprägungsgrade ausgewiesen, aber qualitativ zeigt Aisha hier große Defizite. Der Fokus auf den Bereich dieser Vorläuferfähigkeiten – als Basis für die Weiterarbeit – zeigt einen enormen Lernzuwachs, der es nun ermöglicht, dass Aisha darauf aufbauend ihre Kompetenzen erweitern kann. Sie benötigt eine konsequente Förderung auf Förderebene 2, um bestmöglich parallel zum Unterricht gefördert zu werden.

3. **Prototyp**: Cedric hat besondere Lernschwierigkeiten und braucht deutlich mehr Zeit, um mathematische Inhalte zu erarbeiten. Cedric zeigt auch im zweiten Schulbesuchsjahr nur geringe Zuwächse bei den Basiskompetenzen und benötigt in Förderebene 3 eine dauerhafte engmaschige Kleingruppen- und Einzelförderung, um im Klassenverband mitarbeiten zu können.

Mit Hilfe empirischer Daten konnte hier also entschieden werden, welche Förderung für das jeweilige Kind am sinnvollsten ist, was im weiteren Verlauf der Förderarbeit durch weitere evidenzbasierte Diagnostik bestätigt werden konnte und auch weiterhin zu überprüfen ist. Gerade die Kleingruppenarbeit eröffnet Lehrkräften einen Zugang zum Denken der Kinder, da in einer kleinen Gruppe besonders gut über mathematische Konzepte, Lösungswege und Strategien gesprochen werden kann, ohne die Kinder kommunikativ zu überfordern. In Kleingruppensettings können zentrale Inhalte wiederholend und ggf. auch kleinschrittiger als im Klassenunterricht erarbeitet werden (vgl. Sikora & Voß, 2018, S. 130), etwa auch durch individuelle handlungsorientierte Veranschaulichungen. Gleichzeitig ist die Kleingruppen- und besonders die Einzelförderung mit dem Einsatz enormer personeller, zeitlicher und fachlicher Ressourcen verbunden, die entsprechend effektiv eingesetzt werden müssen.

Fazit und Ausblick

Durch eine Kombination von diagnostischen Elementen und einer individuellen, passgenauen Förderung können Kinder mit Lernschwierigkeiten präventiv unterstützt werden, noch bevor sich erste Lernhürden im arithmetischen Anfangsunterricht zu erheblichen Rechenschwierigkeiten auswachsen. Das RTI-Modell bietet dazu ein gestuftes Vorgehen an. In diesem Zusammenhang ermöglicht die Identifikation der Prototypen 1 bis 3 einen systematischen, ökonomischen Umgang mit schulischen Ressourcen. Möglicherweise lohnt eine weitere Spezifizierung dieser Prototypen, und dies nicht nur für den Mathematikunterricht. Es erscheint sinnvoll, das Schuljahr in Fördermodule einzuteilen, die spezielle inhaltliche Schwerpunkte haben und durchlässig sind, so dass Kinder sowohl dauerhaft als auch vorübergehend gefördert werden können, ohne weitere Parallelstrukturen etablieren zu müssen. Die Kleingruppen könnten dabei eher leistungshomogen zusammengesetzt werden, so dass sich alle Kinder in der Kleingruppe als kompetent erleben können.

Der mehrstufige Diagnose- und Förderansatz mit dem EMBI erweist sich als effektiv, die Förderung von Basiskompetenzen im Rahmen einer flexiblen und durchlässigen Organisationsstruktur praxistauglich umzusetzen.

Literaturverzeichnis

Baumert, B. & Vierbuchen, M.-C. (2018). Eine Schule für alle - wie geht das? Qualitätsmerkmale und Gelingensbedingungen für eine inklusive Schule und inklusiven Unterricht. *Zeitschrift für Heilpädagogik,* 69, S. 526–541.

Benölken, R. (2016). Offene substanzielle Aufgaben - Ein möglicher Schlüssel auch und gerade für die Gestaltung inklusiven Mathematikunterrichts. In F. Käpnick & R. Benölken (Hrsg.), *Individuelles Fördern im Kontext von Inklusion. Tagungsband aus Anlass des zehnjährigen Bestehens des Projektes „Mathe für kleine Asse" und des einjährigen Jubiläums des Projektes „MaKosi".* S. 201–213. WTM.

Boban, I. & Hinz, A. (2003). *Index für Inklusion. Lernen und Teilhabe in der Schule der Vielfalt entwickeln.* Verfügbar unter: https://www.eenet.org.uk/resources/docs/Index%20German.pdf

Booth, T. & Ainscow, M. (2019). *Index für Inklusion. Ein Leitfaden für Schulentwicklung.* Beltz.

Bruner, J. (1972). *Der Prozess der Erziehung.* Berlin-Verlag.

Dexel, T. (2020). *Diversität im Mathematikunterricht der Grundschule. Theoretische Grundlegung und empirische Untersuchungen zu Gelingensbedingungen inklusiven Mathematiklernens (Diversität und Inklusion im Kontext mathematischer Lehr-Lern-Prozesse).* WTM.

Flottmann, N. (2024). *Fermi-Aufgaben im inklusiven Mathematikunterricht der Grundschule. Eine qualitative Studie zu Lösungsstrategien und kooperativem Lernen „Aus der Sache heraus"* (Bielefelder Schriften zur Didaktik der Mathematik, Bd. 16). Springer Spektrum. https://doi.org/10.1007/978-3-658-44602-4

Flottmann, N., Streit-Lehmann, J. & Peter-Koop, A. (2021). *Elementar-Mathematisches BasisInterview. Zahlen und Operationen. Handbuch Diagnostik.* Mildenberger.

Gebhardt, M., Jungjohann, J. & Schurig, M. (2021). *Lernverlaufsdiagnostik im förderorientierten Unterricht. Testkonstruktionen, Instrumente, Praxis.* Ernst Reinhardt. Verfügbar unter: http://www.reinhardt-verlag.de/de/titel/54852/

Götze, D., Selter, C. & Zannetin, E. (2020). *Das KIRA-Buch: Kinder rechnen anders. Verstehen und Fördern im Mathematikunterricht.* Klett/Kallmeyer.

Hartke, B. & Diehl, K. (2013). *Schulische Prävention im Bereich Lernen. Problemlösungen mit dem RTI-Ansatz* (Fördern lernen Prävention, Bd. 18, 1. Auflage). Kohlhammer. Verfügbar unter: http://ebooks.ciando.com/book/index.cfm/bok_ID/1473642

Hirt, U. & Wälti, B. (Hrsg.). (2016). *Lernumgebungen im Mathematikunterricht. Natürliche Differenzierung für Rechenschwache bis Hochbegabte.* Klett/Kallmeyer.

Käpnick, F. (2016). Konzeptionelle Eckpfeiler einer sinnvollen Inklusion im Mathematikunterricht. In F. Käpnick (Hrsg.), *Verschieden verschiedene Kinder. Inklusives Fördern im Mathematikunterricht der Grundschule* (S. 99–138). Klett/Kallmeyer.

Limbach-Reich, A. (2021). „Response to Intervention" (RTI) im Spannungsfeld Inklusiver Diagnostik. In H. Schäfer & C. Rittmeyer (Hrsg.), *Handbuch Inklusive Diagnostik. Kompetenzen feststellen - Entwicklungsbedarfe identifizieren - Förderplanung umsetzen* (S. 404–418). Beltz.

Meijer, C. (2003). *Inclusive education and classroom practices. Middelfart: European Agency for Development in Special Needs Education.*

Peter-Koop, A. (2015). Förderdiagnostik mit dem ElementarMathematischen BasisInterview (EMBI) im inklusiven Anfangsunterricht. In A. Peter-Koop, T. Rottmann & M. M. Lüken (Hrsg.), *Inklusiver Mathematikunterricht in der Grundschule* (S. 156–167). Mildenberger.

Peter-Koop, A. (2016). *Inklusion im Mathematikunterricht – Gemeinsames Lernen am gemeinsamen Gegenstand. Grundschulunterricht,* 1, S. 4-8.

Peter-Koop, A. (2021). Bedeutung und Diagnostik von Vorläuferfähigkeiten für das Mathematiklernen im Anfangsunterricht. In H. Schäfer & C. Rittmeyer (Hrsg.), *Handbuch Inklusive Diagnostik. Kompetenzen feststellen – Entwicklungsbedarfe identifizieren – Förderplanung umsetzen* (S. 191–206). Beltz.

Peter-Koop, A. & Rottmann, T. (2013). *Einsicht in Teil-Ganzes-Beziehungen. Übungen mit den „Zahlenfreunden"*. Fördermagazin Grundschule 35(4), S. 21–25, 37–38.

Peter-Koop, A., Rottmann, T. & Lüken, M. M. (Hrsg.). (2015). *Inklusiver Mathematikunterricht in der Grundschule.* Mildenberger.

Peter-Koop, A., Wollring, B., Grüßing, M. & Spindeler, B. (2007, 2013). *ElementarMathematisches BasisInterview.* Mildenberger.

Prediger, S., Götze, D., Steinbring, H., Tiedemann, K. & Verboom, L. (2017). *Mathematik und Sprache : Tagungsband des AK Grundschule in der GDM 2017.* https://doi.org/10.20378/IRBO-50325

Prengel, A. (1995). *Pädagogik der Vielfalt. Verschiedenheit und Gleichberechtigung in interkultureller, feministischer und integrativer Pädagogik.* Leske + Budrich.

Reschly, D. J. & Bergstrom, M. K. (2009). Response to intervention. In T. B. Gutkin & C. R. Reynolds (Hrsg.), *The handbook of school psychology* (S. 434–460). Wiley.

Rottmann, T. & Peter-Koop, A. (2015). Gemeinsames Lernen am gemeinsamen Gegenstand als Ziel inklusiven Unterrichts. In A. Peter-Koop, T. Rottmann & M. M. Lüken (Hrsg.), *Inklusiver Mathematikunterricht in der Grundschule* (S. 5–9). Mildenberger.

Scherer, P. & Moser Opitz, E. (2010). *Fördern im Mathematikunterricht der Primarstufe.* Spektrum. https://doi.org/10.1007/978-3-8274-2693-2

Schipper, W. (2016). *Handbuch für den Mathematikunterricht an Grundschulen.* Schroedel.

Sikora, S. & Voß, S. (2018). *Mathematikunterricht in der inklusiven Grundschule.* Kohlhammer.

Streit-Lehmann, J., Flottmann, N. & Peter-Koop, A. (2022). *ElementarMathematisches BasisInterview. Zahlen und Operationen. Handbuch Förderung.* Mildenberger.

Vygotskij, L. S. (1978). *Mind in society. The development of higher psychological processes.* Harvard University Press.

Werner, B. (2019). *Mathematik inklusive. Grundriss einer inklusiven Fachdidaktik.* Kohlhammer.

Wittmann, E. C. (1995). Aktiv-entdeckendes und soziales Lernen im Arithmetikunterricht. In G. N. Müller & E. C. Wittmann (Hrsg.), *Mit Kindern rechnen* (S. 10–41). Grundschulverband.

Diagnosebasierter adaptiver Mathematikunterricht

Zum Einsatz des Lehrwerks Welt der Zahl und weiterer Materialien im Anfangsunterricht

Steffen Dingemans, Donatus Coerdt, Jörg Franks,
Timo Maßmann & Thomas Rottmann

Abstract

In diesem Beitrag wird zunächst die Relevanz von mathematischen Schulbüchern in der Grundschule diskutiert. Anhand des Lehrwerks *Welt der Zahl* wird exemplarisch dargelegt, wie die gezielte Diagnose von Vorläuferfähigkeiten und darauf aufbauenden Basiskompetenzen bereits zu Beginn des 1. Schuljahres zu einem adaptiven Unterricht beitragen kann. Basierend auf dem umfangreichen Produktkranz werden schulpraktische Möglichkeiten aufgezeigt, wie Unterricht entsprechend der diagnostischen Erkenntnisse adaptiv gestaltet und Ansätze für die Differenzierung umgesetzt werden können.

Diagnose, Differenzierung, adaptiver Mathematikunterricht, Schulbuch

Einführung

Bereits in den 1980 und 1990er Jahren konnten Studien nachweisen, dass Schulanfänger:innen zwar über teils beträchtliche mathematische Vorkenntnisse verfügen, dass diese Vorkenntnisse aber extrem heterogen sind (Schipper, 2002). Die Etablierung eines inklusiven Schulsystems führt dazu, dass diese Heterogenität in der Grundschule tendenziell weiter zunimmt.

Damit ergibt sich die Anforderung, bereits im Anfangsunterricht in geeigneter Weise mit dieser Heterogenität umzugehen. Als besonders wichtig erscheint einerseits die frühzeitige Diagnose von Vorläuferfähigkeiten, die für das weitere Mathematiklernen - insbesondere für die anschließende Entwicklung mathematischer Basiskompetenzen, wie dem Operations- und dem Stellenwertverständnis - relevant sind (Sale, 2019). Andererseits kommt einem auf diesen diagnostischen Erkenntnissen beruhenden adaptiven Unterricht eine große Bedeutung zu, in welchem eine Differenzierung und Anpassung des Unterrichts an die individuellen Lernvoraussetzungen der Kinder stattfindet. In diesem Beitrag wird aufgezeigt, wie Schulbücher und weitere Materialien Lehrkräfte bei diesen anspruchsvollen Aufgaben unterstützen können.

Zum Stellenwert von Schulbüchern im Mathematikunterricht

Mathematische Schulbücher haben an deutschen Grundschulen einen zentralen Stellenwert, da sie laut den TIMSS-Daten 2011 (Mullis et al., 2012) die primäre Ressource für die Unterrichtsgestaltung sind und die Lernmöglichkeiten der Schüler:innen maßgeblich beeinflussen. Lehrwerke fungieren als wichtiges Bindeglied zwischen dem offiziellen Curriculum und der praktischen Umsetzung und besitzen eine hohe Relevanz für die Unterrichtsentwicklung wie auch für die Unterrichtsvorbereitung und -durchführung.

Effekte von Schulbüchern auf das mathematische Lernen

Trotz zunehmender empirischer Forschung sind die Befunde zur Wirkung von Schulbüchern uneinheitlich (z.B. Schmidt et al., 2001; van Steenbrugge et al., 2013). Aufgrund ihres Längsschnittdesigns und der umfassenden Analyse von 1404 Schüler:innen aus 82 Klassen ist die Studie von Sievert et al. (2019) als besonders aussagekräftig anzusehen. Sie zeigt, dass die Qualität des verwendeten Lehrwerks einen signifikanten Einfluss auf die Entwicklung der Rechenstrategien und des flexiblen Rechnens der Schüler:innen hat. Insbesondere das Lehrwerk *Welt der Zahl* ermöglicht eine bessere Entwicklung im flexiblen Rechnen. Die Studie hebt hervor, dass die kumulativen Effekte der Lehrbuchwahl im Laufe der ersten Schuljahre an Bedeutung gewinnen, was die langfristige Bedeutung der Lehrbuchwahl unterstreicht. Ein weiterer Befund ist, dass andere Faktoren wie kognitive Grundfähigkeiten und Lehrkräftequalifikationen im Vergleich zur Lehrbuchqualität eine geringere Rolle spielen. Als Konsequenz sehen Sievert et al. (2019) in der Wahl hochwertiger Schulbücher die Möglichkeit einer kosteneffizienten Maßnahme zur Verbesserung der Schüler:innenleistungen.

Schulbücher und weitere Lehrmaterialien

Neben dem Schulbuch als primärem Unterrichtsmedium entwickeln die Schulbuchverlage in den letzten Jahren verstärkt ergänzende Materialien, die auf das jeweilige Schulbuch abgestimmt sind. Damit reagieren die Verlage auf veränderte schulische Rahmenbedingungen, zu denen unter anderem zunehmender inklusiver oder jahrgangsgemischter Unterricht sowie Lehrkräfte, die fachfremd unterrichten, gehören. Neben Materialien zur Unterstützung bei der Unterrichtsvorbereitung finden sich vor allem Materialien zur Differenzierung, zur inhaltlichen Vertiefung und Übung sowie zur Diagnose (inkl. Leistungsbeurteilung).

Auch das Lehrwerk *Welt der Zahl* bietet einen umfangreichen Produktkranz mit ergänzenden Materialien, welche eine Anpassung an die individuellen Kompetenzen der Kinder und damit eine Adaption des Unterrichts ermöglichen. Neben dem Arbeitsheft gibt es Förder- und Forderhefte für leistungsschwache und -starke Kinder, integrierte Diagnosen und Lernerfolgskontrollen sowie spezielle Materialien für Kinder mit Förderbedarf (aus der Reihe *Welt der Zahl inklusiv*). Ein Vorteil ist die enge Verzahnung mit dem Schulbuch. Einheitliche Arbeitsmittel, vergleichbare Darstellungen und Querverweise ermöglichen eine unkomplizierte Kombination der ergänzenden Materialien. Eine Besonderheit im Produktkranz ist mit der Eingangsdiagnose (Peter-Koop et al., 2020) ein Screeningverfahren für den Anfangsunterricht, welches speziell mathematische Vorläuferfähigkeiten überprüft.

Diagnostik von mathematischen Vorläuferfähigkeiten und Basiskompetenzen

Viele Kinder verfügen bereits vor Schuleintritt über ausprägte arithmetische wie auch geometrische Kompetenzen. Allerdings sind diese sehr heterogen; einige Kinder zeigen auch im Verlauf des 1. Schuljahrs Defizite in Kompetenzen, die andere Kinder bereits vor Schuleintritt entwickelt haben. Dabei können fehlende Kompetenzen die weitere mathematische Entwicklung negativ beeinflussen. Studien zeigen, dass es deutliche Zusammenhänge zwischen unterdurchschnittlichen Vorläuferfähigkeiten und unterdurchschnittlichen arithmetischen Kompetenzen am Ende des 1. Schuljahres gibt (Peter-Koop & Kollhoff, 2015).

Für die frühzeitige Diagnose der Vorläuferfähigkeiten und darauf aufbauender Basiskompetenzen bietet es sich an, in einem zweistufigen Verfahren zunächst ein Screeningverfahren wie die Eingangsdiagnose von *Welt der Zahl* für die gesamte Lerngruppe zu nutzen. So lassen sich auf einfache Weise diejenigen Kinder identifizieren, die Auffälligkeiten zeigen und die dann im nächsten Schritt detaillierter z.B. mit dem ElementarMathematischenBasisInterview (EMBI; Coerdt, 2025; Flottmann et al., 2021) überprüft werden können. Die Ergebnisse einer solchen Diagnose bilden eine sinnvolle Basis, um den Mathematikunterricht adaptiv zu gestalten und allen Schüler:innen angemessene Lerngelegenheiten zu bieten.

Eingangsdiagnose *Welt der Zahl*

Die Eingangsdiagnose von *Welt der Zahl* (Peter-Koop et al., 2020) ist als Screening angelegt und soll damit den Stand der Vorläuferfähigkeiten und insbesondere Schüler:innen identifizieren, die möglicherweise Schwierigkeiten beim Mathematiklernen haben. Sie liefert zwar keinen Einblick in die mathematischen Denkprozesse der Kinder, kann aber zum Anlass genommen, um mit den identifizierten Kindern weitere Maßnahmen bezogen auf Diagnostik und Förderung abzuleiten. Das Screening kann zeiteffizient mit einer ganzen Klasse in einer Unterrichtsstunde durchgeführt werden und ist im Paper-Pencil-Format angelegt, wobei formales Schreiben nicht gefordert ist und die Schulanfänger:innen mithilfe von Musteraufgaben und Visualisierungen unterstützt werden. Die Eingangsdiagnose umfasst insgesamt 14 Aufgaben. Sechs Aufgaben dienen der Überprüfung von visuellen Wahrnehmungsfähigkeiten (z.B. Figur-Grund-Wahrnehmung, Raum-Lage-Beziehung, Auge-Hand-Koordination; Abb. 1 links). Acht Aufgaben thematisieren mengen- und zahlenbezogene Kompetenzen (z.B. Mengenvergleich, Zahlenreihe, Mengenerfassung, Rechenoperationen; Abb. 1 rechts), die Kinder zum Schulanfang erworben haben sollten.

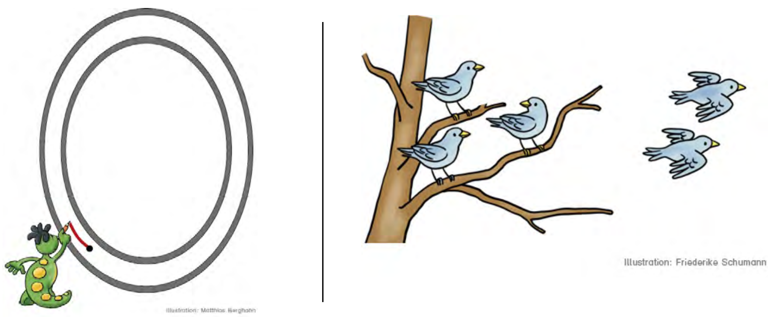


Abb. 1: Items aus der Eingangsdiagnose von Welt der Zahl (links: Auge-Hand-Koordination; rechts: Subtraktion mit Abzählmöglichkeit)

Da das Screening Kinder mit geringen mathematischen Vorläuferfähigkeiten identifizieren soll, ist es so angelegt, dass Schulanfänger:innen bei der Bearbeitung mehrheitlich richtige Antworten geben. Dies zeigt auch eine quantitative Auswertung aus einer Erprobung mit mehr als 1700 Kindern (Peter-Koop et al., 2020). Mit mindestens 12 von 14 richtig gelösten Aufgaben haben ca. 70% der Kinder die erwartbaren Vorläuferfähigkeiten erworben und waren damit unauffällig. Kinder mit 10 oder 11 Punkten sollten im Unterricht aufmerksam beobachtet werden. Etwa 12% der Kinder bildeten mit neun oder weniger gelösten Aufgaben die schwächste Gruppe und gelten als förderbedürftig. Die größten Schwierigkeiten hatten diese Kinder in den Bereichen simultane und quasi-simultane Mengenerfassung, Auge-Hand-Koordination, Mengendarstellung und Wahrnehmungskonstanz.

Für die schulische Praxis bedeutet das, auf dieser Grundlage die als förderbedürftig identifizierten Kinder differenzierter zu diagnostizieren, um daraus konkrete Unterstützungsmaßnahmen abzuleiten.

Das ElementarMathematische BasisInterview (EMBI)

Für eine differenzierte Diagnostik eignet sich das Elementarmathematische Basisinterview (EMBI), um neben quantitativen auch qualitative Aussagen bezüglich der Vorläuferfähigkeiten und darauf aufbauende Basiskompetenzen zu erhalten. Das EMBI gibt es für die Bereiche *Zahlen und Operationen* (Flottmann et al., 2021) sowie *Raum und Form* (Coerdt, 2025). Zur Konzeption des EMBI gehören eine materialgestützte Interviewführung, klar definierte Abbruchkriterien (um Überforderung und Demotivation zu vermeiden) sowie eine Beschreibung der Fähigkeiten in Form von Ausprägungsgraden. Der nächst höhere Ausprägungsgrad zeigt dabei das zu erreichende Förderziel an. Die Lösungen der Kinder sowie die beobachteten Handlungen werden auf einem Protokollbogen mit übersichtlichen Ankreuzmöglichkeiten sowie Platz für ergänzende Notizen und Zeichnungen dokumentiert. In beiden Interviews gibt es einen speziellen Vorschulteil (V-Teil), der bereits ab Ende des Kindergartens eingesetzt werden kann und auf die geometrischen bzw. arithmetischen Vorläuferfähigkeiten fokussiert.

Zeigen Kinder im ersten Teil des Screenings Auffälligkeiten bei den Aufgaben zur visuellen Wahrnehmung, kann das EMBI Raum und Form (4-7) herangezogen werden (Coerdt, 2025). Hier werden visuelle und räumliche Fähigkeitsbereiche in unterschiedlichen Niveaustufen bei vier- bis siebenjährigen Kindern erfasst. Dazu steht ein V-Teil zur Verfügung, der geometrische Vorläuferfähigkeiten umfasst sowie drei Interviewteile, die visuell-räumliche Basiskompetenzen beinhalten. Hatten Kinder beispielsweise Schwierigkeiten in der Screening-Aufgabe zur Auge-Hand-Koordination (s. Abb. 1 links), werden im EMBI Raum und Form Aufgaben gestellt, die einen detaillierteren Einblick dazu liefern. Im dargestellten Beispiel (Abb. 2) sollen die Kinder unabhängig von der Stifthaltung Formen in Umrisse legen, ohne diese zu berühren. Die Umrisse werden auf jeder Niveaustufe kleiner und bieten zudem immer weniger Orientierungspunkte (Ecken) an.

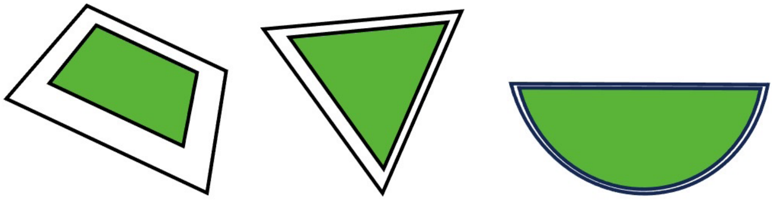


Abb. 2: Items im EMBI Raum und Form zur Auge-Hand-Koordination

Liegen die Schwierigkeiten von Kindern im zweiten Teil des Screenings bei den arithmetischen Aufgaben, so kann das EMBI Zahlen und Operationen genutzt werden (Flottmann et al., 2021). Das zentrale Anliegen einer differenzierten Diagnostik besteht also darin, eine Grundlage für die anschließende passgenaue Förderung und für einen adaptiven, an die Lernvoraussetzungen der Kinder angepassten Mathematikunterricht zu liefern.

Adaptiver Mathematikunterricht

Um möglichst „guten" Mathematikunterricht umzusetzen, ergibt sich für die Lehrkraft die Anforderung, die Heterogenität der Lernvoraussetzungen möglichst umfassend zu berücksichtigen und das Lernangebot so zu gestalten, dass alle Schüler:innen ihren individuellen Voraussetzungen entsprechend erfolgreich lernen können. Beck et al. (2008) sprechen in diesem Zusammenhang von „adaptiver Lehrkompetenz" und fassen darunter die Fähigkeiten, einerseits bereits bei der Planung eine optimale Passung zwischen Lernstand und Lernangebot herzustellen, und andererseits während des Unterrichtens in Abhängigkeit von den tatsächlichen Lernprozessen und auftretenden Schwierigkeiten Anpassungen vorzunehmen.

Neben Sach- und Klassenführungskompetenzen sind dabei vor allem diagnostische sowie didaktische Kompetenzen der Lehrkräfte notwendig (Beck et al., 2008, S. 41ff.). Aufbauend auf diagnostischen Erkenntnissen zu Kompetenzen und zu (fehlenden) Lernvoraussetzungen können Lehrkräfte ihren Mathematikunterricht adaptiv gestalten und so für eine möglichst optimale Passung des Lernangebots sorgen. Dazu gehört einerseits, die Voraussetzungen für ein erfolgreiches schulisches Mathematiklernen zu schaffen und andererseits, durch eine sinnvolle Differenzierung allen Schüler:innen einer Lerngruppe Lerngelegenheiten auf ihrem individuellen Niveau zu ermöglichen.

Vorläuferfähigkeiten und Basiskompetenzen entwickeln

Ausreichend entwickelte Vorläuferfähigkeiten sind für das weitere Mathematiklernen von zentraler Bedeutung. Entsprechend fordert der NRW-Lehrplan, dass unzureichend entwickelte Vorläuferfähigkeiten „zunächst aufgebaut werden [müssen], um ein erfolgreiches Weiterlernen zu gewährleisten" (MSB, 2021, S. 81). Bei festgestellten Defiziten bietet sich begleitend zum regulären Mathematikunterricht die Arbeit mit Materialien an, die speziell auf die Förderung der entsprechenden Vorläuferfähigkeiten ausgerichtet sind. Vorteilhaft sind hier Materialien, die passgenau auf ein Diagnoseinstrument zugeschnitten sind und so die gezielte Förderung in den auffälligen Bereichen ermöglichen. Ein Beispiel stellt der Vorkurs zu *Welt der Zahl* dar, der Übungen gezielt zu den einzelnen Bereichen der Eingangsdiagnose (wie z.B. zur Auge-Hand-Koordination; Abb. 3) bietet. Die zum EMBI passend konzipierten Handbücher liefern hilfreiche Anregungen für konkrete Fördermaßnahmen (für den Bereich *Zahlen und Operationen*:

Streit-Lehmann et al., 2022; für den Bereich *Raum und Form*: Coerdt & Peter-Koop, in Vorb.) sowie für eine adaptiv an die Lernvoraussetzungen angepasste Unterrichtsgestaltung.

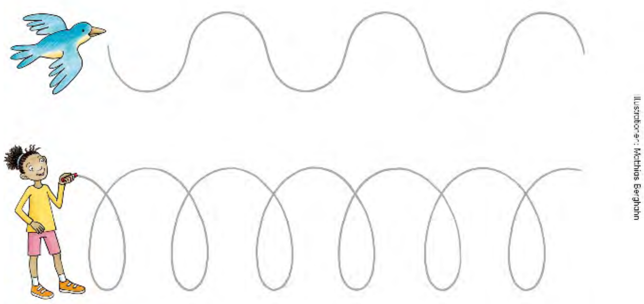


Abb. 3: Übungen zur Auge-Hand-Koordination (Vorkurs Welt der Zahl, S. 2)

Möglichkeiten der Differenzierung im Mathematikunterricht

Die Heterogenität der Schülerschaft erfordert einen differenzierenden Unterricht. Neben Schüler:innen mit noch fehlenden Lernvoraussetzungen gibt es in jeder Lerngruppe auch Kinder mit besonderen Begabungen. „Guter" (Mathematik-) Unterricht muss also für sämtliche Schüler:innen individuell passende Lernangebote bereitstellen. Besonders der Differenzierung mit Aufgaben kommt in Schulbüchern für den Mathematikunterricht eine besondere Rolle zu. Ein Ansatz hierzu ist die sog. natürliche Differenzierung mit der Verwendung von selbstdifferenzierenden Aufgaben (Krauthausen & Scherer, 2014). Alle Schüler:innen einer Lerngruppe erhalten bewusst das gleiche Lernangebot bzw. dieselbe Aufgabe. Die Bearbeitung dieser Aufgabe findet dann jedoch auf einem individuell unterschiedlichen Niveau statt; die Kinder nutzen unterschiedliche Lösungswege, Hilfsmittel, Darstellungsweisen und bearbeiten die Aufgabe in unterschiedlichem Umfang und in unterschiedlicher Tiefe (vgl. Abb. 4).

Abb. 4: Beispiel zur natürlichen Differenzierung (Welt der Zahl 1, S. 82)

Als weiterer Differenzierungsansatz werden in Schulbüchern häufig gestufte Aufgaben mit Teilaufgaben in unterschiedlichen Niveaus genutzt (Rottmann, 2024). Neben einfachen Einstiegsaufgaben werden zu einem Inhalt zunehmend anspruchsvollere Aufgaben gestellt, die ggf. nicht mehr von allen Kindern der Lerngruppe bearbeitet werden. So arbeiten alle Kinder am gleichen Inhalt, bearbeiten aber nicht zwangsweise auch dieselben Aufgaben.

Abb. 5: Präventiv orientiertes Modell schulischen Lernens (vgl. Wember, 2013)

Als eine Weiterentwicklung von gestuften Aufgaben kann das präventiv orientierte Modell schulischen Lernens von Wember (2013) betrachtet werden. Wember beschreibt ein fünfstufiges Modell zur Berücksichtigung der Heterogenität von Schülergruppen (Abb. 5).

Die Basisstufe bezieht sich auf die regulären, vom Lehrplan definierten Anforderungen und wird vom Schulbuch als zentralem Medium abgedeckt. Bereits auf dieser Niveaustufe findet eine Differenzierung statt, indem ein Thema wie „Aufgabe und Umkehraufgabe“ in Form von gestuften Aufgaben zunächst handelnd eingeführt sowie bildlich dargestellt wird, bevor auf der symbolischen Ebene eine weitere Progression durch das zunehmend eigenständige Finden der Umkehraufgaben vorgenommen wird (Abb. 6).

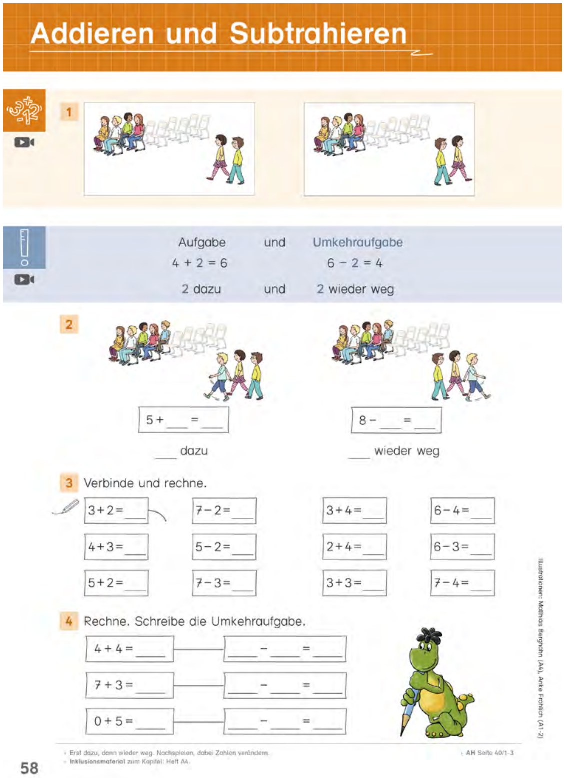
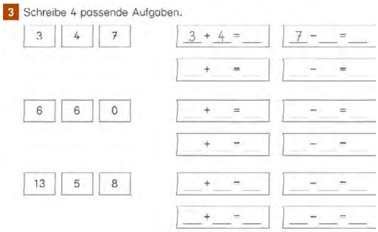


Abb. 6: Schulbuch als Material für die Basisstufe (Welt der Zahl 1, S. 58)

Eine weitere Ausdifferenzierung findet dann mit der Erweiterungsstufe I (für leistungsstärkere Kinder) bzw. mit der der Unterstützungsstufe I (für Kinder mit ersten Lern- und Verständnisschwierigkeiten) statt. Hierfür kann das auf das Schulbuch abgestimmte Forderheft bzw. Förderheft genutzt werden. Beide Materialien haben dabei die Adaption des Lernangebots zum Ziel, um einen Unterricht entsprechend der curricularen Anforderungen des Lehrplans für Kinder mit unterschiedlichen Lernvoraussetzungen zu ermöglichen. Während das Thema „Aufgabe und Umkehraufgabe" im Forderheft mit erweiternden Aufgaben vorwiegend auf symbolischer Ebene vertieft wird (z.B. zum Finden der Aufgaben und Umkehraufgaben zu einem vorgegebenen Zahlentripel; vgl. Abb. 7), bietet das Förderheft weitere Aufgaben auf ikonischer Ebene, die einen Bezug zur Handlung des Hinzukommens und Weggehens herstellen (vgl. Abb. 8).



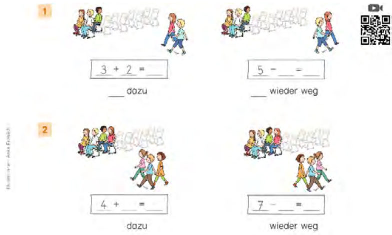


Abb. 7: Erweiterungsstufe I (Förderheft 1, S. 24)

Abb. 8: Unterstützungsstufe I (Förderheft 1, S. 43)

Kinder mit stärker ausgeprägten Lernschwierigkeiten, besonders, wenn sie zieldifferent unterrichtet werden, arbeiten auf der Unterstützungsstufe II. Die Materialien der Reihe *Welt der Zahl inklusiv* bieten Aufgaben auf einem elementaren Niveau, die sich ebenfalls an den Themen des Schulbuchs orientieren und dadurch ein gemeinsames Arbeiten aller Kinder einer heterogenen Lerngruppe an einem gemeinsamen Lerngegenstand möglich wird. Im Vergleich zu den Aufgaben im Förderheft wird beispielsweise in einem kleineren Zahlenraum gearbeitet, werden grafisch reduzierte Darstellungen verwendet und Hilfen zum Eintragen einzelner Zahlen gegeben (vgl. Abb. 9).

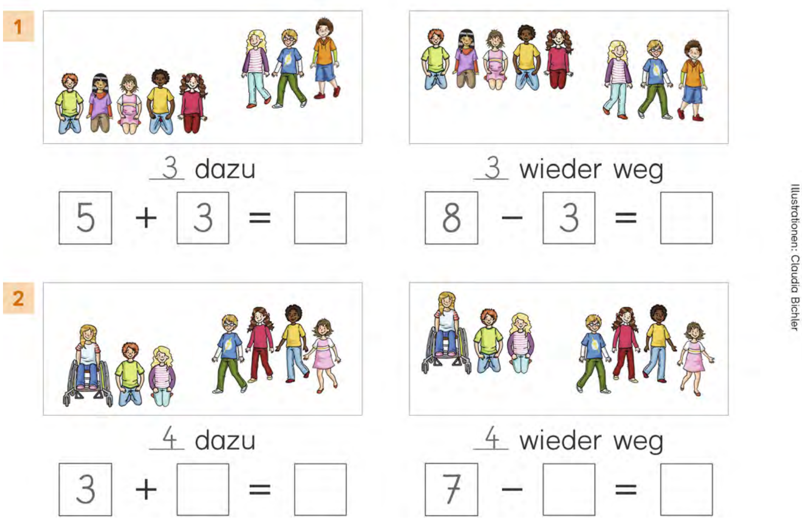


Abb. 9: Unterstützungsstufe II (Welt der Zahl inklusiv, Heft A4, S. 30)

Zusammenfassung

Schulbüchern kommt gerade im Mathematikunterricht eine hohe Bedeutung zu. Qualitativ hochwertige Lehrwerke zeigen einen positiven Einfluss auf die mathematische Kompetenzentwicklung. Ein Lehrwerk wie *Welt der Zahl* bietet wichtige Möglichkeiten für ein differenziertes Arbeiten und eine bestmögliche Unterstützung aller Kinder einer Lerngruppe. Besonderes Potenzial steckt dabei in der Nutzung von Diagnoseinstrumenten (z.B. zu Vorläuferfähigkeiten wie in der Eingangsdiagnose von *Welt der Zahl* oder im EMBI, welches neben Vorläuferfähigkeiten auch Basiskompetenzen erfasst). Die Lehrkraft kann so frühzeitig Hinweise auf noch unzureichend entwickelte Vorläuferfähigkeiten, auf mögliche Lernschwierigkeiten und auf besonders ausgeprägte Kompetenzen erhalten und den eigenen Mathematikunterricht so konsequent an den individuellen Lernvoraussetzungen der Kinder ausrichten. Gut geeignet für einen solchen diagnosebasierten adaptiven Unterricht ist die Differenzierung ausgehend von Aufgaben auf der Basisstufe mit einem darauf abgestimmten differenzierenden Angebot in Unterstützungs- wie auch Erweiterungsstufen wie im Modell von Wember (2013) beschrieben. Gerade das differenzierende Lehrwerk *Welt der Zahl* bietet durch die inhaltlich und von den verwendeten Arbeitsmitteln und Darstellungen aufeinander abgestimmten Materialien die Förderung sowohl des gemeinsamen Lernens an einem gemeinsamen Lerngegenstand als auch des selbstständigen Arbeitens durch gezielte Unterstützung sowie durch ein erweitertes Lernangebot. Damit stellt ein solches Lehrwerk eine wichtige Unterstützung für Lehrkräfte dar, um den komplexen Anforderungen an einen differenzierenden Mathematikunterricht gerecht zu werden.

Literaturverzeichnis

Beck, E., Baer, M., Guldimann, T., Bischoff, S., Brühwiler, C., Müller, P., Niedermann, R., Rogalla, M., & Vogt, F. (2008). *Adaptive Lehrkompetenz.* Waxmann.

Coerdt, D. (2025). *ElementarMathematisches BasisInterview: Raum und Form (4-7). Handbuch Diagnostik.* Mildenberger.

Coerdt, D., Peter-Koop, A. (in Vorb.). *ElementarMathematisches BasisInterview: Raum und Form (4-7). Handbuch Förderung.* Mildenberger.

Flottmann, N., Streit-Lehmann, J. & Peter-Koop, A. (2021). *Elementar-Mathematisches BasisInterview: Zahlen und Operationen. Handbuch Diagnostik.* Mildenberger.

Krauthausen, G. & Scherer, P. (2014). *Natürliche Differenzierung im Mathematikunterricht.* Klett Kallmeyer.

MSB (2021). *Lehrplan für die Primarstufe in Nordrhein-Westfalen. Fach Mathematik.*

Mullis, I. V. S., Martin, M. O., Foy, P. & Arora, A. (2012). *TIMSS 2011 international results in mathematics.* TIMSS & PIRLS International Study Center.

Peter-Koop, A., Kollhoff, S. (2015). Transition to School: Prior to school mathematical skills and knowledge of low-achieving children at the end of grade 1. In B. Perry, A. MacDonald & A. Gervasoni (Hrsg.), *Mathematics and transition to school: International perspectives* (S. 65-83). Springer.

Peter-Koop, A., Kerstingjohänner, P. & Streit-Lehmann, J. (2020). *Welt der Zahl: Handbuch zur Eingangsdiagnose.* Westermann.

Rottmann, T. (2024). Lernumgebungen und „gute Aufgaben" im Mathematikunterricht der Grundschule. Möglichkeiten der Differenzierung mit Aufgaben im heterogenitätssensiblen Unterricht. *PFLB – Praxis-ForschungLehrer*innenBildung, 6*(3), 5–16.

Sale, A. (2019). *Alltagsnahe Förderung mathematischer Vorläuferfertigkeiten bei vorliegenden Entwicklungsrisiken - Evaluation einer Fördermaßnahme in der Transition Kindergarten-Schule.* Universität Oldenburg.

Schipper, W. (2002). Schulanfänger verfügen über hohe mathematische Kompetenzen. Eine Auseinandersetzung mit einem Mythos. In A. Peter-Koop (Hrsg.), *Das besondere Kind im Mathematikunterricht der Grundschule* (S. 119 – 140). 2.Aufl. Mildenberger.

Schmidt, W. H., McKnight, C. C., Houang, R. T., Wang, H., Wiley, D. E., Cogan, L. S. & Wolfe, R. G. (2001). *Why schools matter: A cross-national comparison of curriculum and learning.* Jossey-Bass.

Sievert, H., van den Ham, A.-K., Niedermeyer, I. & Heinze, A. (2019). Effects of mathematics textbooks on the development of primary school children's adaptive expertise in arithmetic. *Learning and individual differences, 74,* 101716.

Streit-Lehmann, J., Flottmann, N. & Peter-Koop, A. (2022). *ElementarMathematisches BasisInterview: Zahlen und Operationen. Handbuch Förderung.* Mildenberger.

van Steenbrugge, H., Valcke, M. & Desoete, A. (2013). Teachers' views of mathematics textbook series in Flanders: Does it (not) matter which mathematics textbook series schools choose? *Journal of Curriculum Studies, 45*(3), 322–353.

Wember, F. B. (2013). Herausforderung Inklusion: ein präventiv orientiertes Modell schulischen Lernens und vier zentrale Bedingungen inklusiver Unterrichtsentwicklung. *Zeitschrift für Heilpädagogik,* 10, 380–388.

Verwendete Materialien aus der Lehrwerksreihe Welt der Zahl (Hrsg. T. Rottmann & G. Träger, 2020ff., Westermann):

Schulbuch, 1. Schuljahr (2020)

Vorkurs (2020)

Förderheft 1 (2020)

Forderheft 1 (2020)

Welt der Zahl inklusiv, Heft A4: Rechnen bis 10 (2020)

Begründungsaufgaben bei VERA3 – vier Schritte zur adaptiven Rückmeldung

Bernd Wollring

Abstract

Auch wenn noch nicht ausreichend geklärt ist, ob mathematisches Begründen als mathematische Basiskompetenz gelten kann oder muss, stellen Begründungsaufgaben bei VERA3 Anforderungen an das mathematische Argumentieren und damit verbunden an das Sprachvermögen. In diesem Sinne schließt dieser Beitrag an den ersten Beitrag des vorliegenden Bandes an. Teilt man den Standpunkt des kompetenzorientierten Beurteilens, so besteht die Anforderung an fördernde Personen darin, anerkennenswerte Teilleistungen zu identifizieren und darauf eine adaptive Förderung zu basieren. An einer Begründungsaufgabe aus VERA3 wird exemplarisch ein Konzept vorgestellt, mit dem in vier Schritten eine adaptive Rückmeldung auf der Basis einer fachdidaktischen Diagnose entsteht. Sie soll Schülerinnen und Schülern Ansätze zum Erschließen der Lösung in Eigenarbeit bieten und lernbegleitenden Personen Hilfe zum Unterstützen.

Argumentieren, Begründungsaufgaben, Diagnostik,Adaptives Rückmelden, Fördern

Zur Problematik des textlichen Unterstützens

Eine Besonderheit bei den nationalen Vergleichsarbeiten VERA3 Mathematik bilden Begründungsaufgaben. Sie bestehen stets darin, dass zu einer Fragestellung zunächst eine Ja-Nein-Antwort zu geben ist und daraufhin eine Textbegründung formuliert werden soll.

Das Unterstützen von Schülerinnen und Schülern, die bei Begründungsaufgaben nur geringe Erfolge erzielen, stellt spezifische Anforderungen und ist aufwändig. Man findet in der Literatur zwar ausgiebige Fördervorschläge, doch diese haben zumeist den Nachteil, dass sie beim Unterstützen einzelner Kinder viel Zeitaufwand und Zuwendung erfordern und die Lernbegleitung damit vor erhebliche logistische Probleme stellen. Einer Anregung von Olaf Köller folgend sieht der Autor daher die Notwendigkeit, auch Fördermaterial zu entwickeln, mit dem die Kinder notfalls in Eigenarbeit oder mit Unterstützung einer Person, die nicht die Lehrkraft ist, zum Erfolg finden. Eine zweite Notwendigkeit sieht der Autor darin, dass ein Kind mit geringen

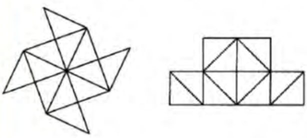
Erfolgen bei Begründungsaufgaben eine Unterstützung benötigt, die es ermutigt eine Lösung anzugehen. Dies erscheint möglich, wenn die Unterstützung so strukturiert ist, dass sie die anerkennenswerten Teilleistungen identifiziert und respektiert und darauf aufbauend eine achtsame inhaltliche Weiterführung entwickelt.

Die Aufgabe „Windmühle“ – Zur Konzeption

Die Aufgabe „Windmühle“ wurde bei VERA3 im Jahr 2018 gestellt. Sie stammt von Maria Skejic (IQB 2017).

Aufgabe 15

Bernd sagt: „Die Flächen der beiden Figuren sind gleich groß.“



Stimmt das? Kreuze an. ☐ ja ☐ nein

Begründe.

Abb. 1: IQB 2017

Die folgende Charakterisierung der Aufgabe dient auch als Grundlage zur Gestaltung von Ausbildungs- und Fortbildungs-Einheiten für Studierende und Lehrkräfte, bei denen es um adaptive Rückmeldungen geht.

Bei dieser Aufgabe liegt der Schwerpunkt nicht auf dem Ergebnis, sondern auf der Strategie. Die wird erst durch die Äußerungen im Text deutlich.

Diese Aufgabe ist bei VERA3 der Kompetenzstufe 5 (von 5) zugeordnet und dem Anforderungsbereich 3 „Verallgemeinern und Reflektieren“ (KMK 2005).

Die angesprochenen allgemeinen (prozessbezogenen) Kompetenzen sind: mathematische Aussagen hinterfragen und auf Korrektheit prüfen (3.1) und Begründungen suchen und nachvollziehen (3.3).
Die inhaltsbezogenen Kompetenzen (mathematische Leitideen) sind: die

Flächeninhalte ebener Figuren durch Zerlegen vergleichen und durch Auslegen mit Einheitsflächen messen (2.4a).

Voraussetzung zu einer adaptiven Rückmeldung zu einer vorliegenden Eigenproduktion ist zunächst das Auswerten. VERA3 unterscheidet in der finalen Beurteilung nur „richtig" oder „falsch". Dazu dienen folgende Leitfragen:

Wie lautet die richtige Antwort auf diese Frage?

Was gilt als richtige Begründung?

Was gilt als falsche Begründung?

Wann ist die Aufgabe insgesamt als richtig zu bewerten?

Bevor Studierende adaptive Rückmeldungen konzipieren, werden sie gebeten als Antwort auf diese Fragen Auswertungsrichtlinien zu konzipieren.

Die Auswertungsrichtlinien von VERA3 zu dieser Aufgabe wurden vor der Pilotierung erstellt. Sie zeigen, dass das Antizipieren von Bearbeitungen ohne das Vorliegen authentischer Eigenproduktionen schwierig ist. Die Auswertungsrichtlinien im Einzelnen (IQB 2017):

> RICHTIG.
> JA wurde angekreuzt und eine Begründung gegeben, die auf dieselbe Anzahl der Dreiecke oder Quadrate schließen lässt (Idee des Messens), z.B. Beide Figuren bestehen aus 12 Dreiecken; Beide Figuren bestehen aus 6 Quadraten; Ich habe die Dreiecke bei beiden Figuren gezählt; Weil immer 4 (Dreiecke) außen und 8 in der Mitte sind. ODER JA wurde angekreuzt und eine Begründung gegeben, die auf Zerlegungsgleichheit basiert z.B. Man kann aus der einen die andere Figur machen, ohne dass etwas übrig bleibt; Beide sind gleich, nur anders gelegt; Weil sie aus einem großen Viereck und vier kleinen Dreiecken bestehen.
>
> FALSCH.
> Alle anderen Antworten, z.B. NEIN wurde angekreuzt ODER JA wurde angekreuzt UND/ODER keine, eine falsche oder eine unvollständige Antwort gegeben, z.B. Ich habe gezählt; Weil beide aus gleich großen Dreiecken bestehen;. Es ergibt dieselbe Form.

Die Diskussion dieser Auswertungsrichtlinien mit den Studierenden, welche die folgenden Rückmeldungen erstellt haben, ging den Rückmeldungen voraus, ist aber aus Platzgründen hier nicht dokumentiert.

Das Umgehen mit sprachlichen Schwierigkeiten ist in den Auswertungsrichtlinien des IQB nicht thematisiert, das Deuten individueller Sprache bleibt den Auswertenden überlassen.

Es zeigt sich, dass es für differenzierte adaptive Rückmeldungen sinnvoll erscheint, Merkmale von Lösungen zu kennzeichnen, die im Sinne von

Entwicklungsstufen Bearbeitungen mit anerkennenswerten Teilleistungen beschreiben (vgl. Clarke, Dg.; Downton, A.; Knight, R. & Lewis, G. (2006)). Auch das wird aus Platzgründen hier nicht ausgeführt.

Adaptive Rückmeldungen

Konzepte von adaptiven Rückmeldungen erscheinen im Diskurs und in der Literatur in verschiedenen Zusammenhängen. Eine aus Sicht des Autors für die Mathematikdidaktik nutzbare Basierung liefert S. Narciss (2008). Ihr Modell beschreibt adaptives Feedback im Sinne von zwei interagierenden mehrfach zu durchlaufenden Regelkreisen:

> "(1) an internal feedback loop that processes internal feedback, or the actual values to which the learner has direct access (e.g., confidence in answers, perceived effort); and
>
> (2) an external feedback loop that processes the actual values determined by the learning medium (e.g., the instructor, learning program, experimenter)."

Die konkrete Durchführung erfordert das Definieren und Messen von kontrollierten Variablen, an deren Änderung der Erfolg des Feedbacks zu messen ist. Narciss selbst verweist darauf, dass Ziel und Erfolg adaptiven Feedbacks nicht nur kognitiv zu sehen sind, sondern auch einen Beitrag zum Selbstkonzept einschließen.

Das Modell wird im vorliegenden Fall so reduziert, dass die adaptive Rückmeldung zwei kontrollierte Variablen betrifft:

(M) mathematische Strategieelemente, welche zu einer korrekten Lösung führen,

(S) sprachliche Elemente, welche hinter den verwendeten Bezeichnungen auf tragfähige Begriffe verweisen.

Ein besonderer Fokus liegt dabei nach Auffassung des Autors darin, auf den teils sehr rudimentären schriftsprachlichen Äußerungen der Kinder Ansätze für ein Feedback zu basieren, das Ermutigung einschließt.

Ein Vier-Punkte-Konzept zur Konzeption adaptiver Rückmeldungen

Das folgende Konzept des Autors ist als Hands-on-Unterstützung nicht nur für professionelle Lehrkräfte gedacht, sondern auch und insbesondere für Lernbegleitungen wie etwa Quereinsteigern, helfenden Mitarbeitern und anderen. Eine adaptive Rückmeldung in diesem Sinne umfasst zwei Elemente:

(TA) Ein diagnostisch basiertes Identifizieren der anerkennenswerten Teilleistung in der Eigenproduktion und eine darauf bezogene Anerkennung,
(IU) eine auf die anerkennenswerte Teilleistung bezogene Information zur Unterstützung.

Zu TA. Das Identifizieren der Teilleistung erfordert mathematische und mathematikdidaktische Kompetenzen (*content knowledge* und *pedagogical content knowledge*). Ein globales Lob allein hat nach Auffassung des Autors nur begrenzte Wirkung. Die Unterstützungsimpulse sollten die identifizierte Teilleistung aufnehmen.
Zu IU. Bisweilen schließt der Ausdruck „Förderung“ negative Konnotationen ein. „Entfaltung“ oder „Unterstützung“ erscheinen dem Autor angemessener. Eine adaptive Rückmeldung wie im Folgenden sieht der Autor als wesentlichen Teil der Unterstützung.

Die Konzeption adaptiver Rückmeldungen wird mit Studierenden des Lehramtes L1 (Primarstufe) in Seminaren an der Universität Kassel anhand von zwei Studienaufgaben trainiert. Das daran anschließende weitergehende Entwerfen von Förderkonzepten ist nicht Gegenstand dieses Textes, es ist dargestellt bei Reimers & Wollring (2018). Allerdings sind die dort dargestellten Förderimpulse allgemeiner Art und nicht wie im Folgenden auf die Sprache bezogen adaptiv formuliert.

Studienaufgabe 1. Einnehmen der Rolle der Schülerinnen und Schüler.

Lösen Sie die Aufgabe so, wie Sie es von einem Kind am Ende des dritten Schuljahres erwarten.

Studienaufgabe 2. Vier-Punkte-Konzept zum Erstellen einer sprachsensiblen adaptiven Rückmeldung.

1. Erstellen Sie ein lesbares Transkript des Schülertextes.
2. Deuten Sie den Schülertext konstruktiv.
3. Erstellen Sie eine sprachsensible erste Optimierung des Schülertextes.
4. Erstellen Sie eine zweite adressierte Optimierung des Schülertextes.

Zu 1. Das Transkript erschließt die Eigenproduktion zunächst als lesbar. Phonetische Schreibweisen werden übertragen. Rechtschreibfehler werden nur insoweit behoben, dass das Gemeinte deutlich wird. Eine weitergehende Korrektur erfolgt zunächst nicht. Das Transkript ist für unterstützende Personen gedacht und sollte von ihnen erstellt werden.

Zu 2. Die konstruktive Deutung soll belegen, was mit dem Text der Eigenproduktion gemeint sein kann, sie sollte strategisch korrekte Ansätze benennen (*Argumentationskeime*), auch wenn diese nicht vollständig ausgeführt sind. Ferner ist zu prüfen, ob bei zweifelhaften Bezeichnungen das Richtige gemeint sein kann. Die Deutung ist für unterstützende Personen gedacht und sollte von ihnen erstellt werden.

Zu 3. Die erste sprachsensible Textoptimierung ist an die Schülerin oder den Schüler persönlich adressiert. Sie nimmt soweit als möglich seine Formulierungen respektierend auf, auch dann, wenn sie noch nicht endgültig korrekt sind und damit noch keine vollständige Aufgabenbearbeitung erreicht ist. Die sanft korrigierenden Elemente sollten Ermutigungen zum Konstruieren und Argumentieren in Richtung der vollständigen Lösung sein.

Zu 4. Die zweite adressierte Textoptimierung beschreibt eine weitgehend vollständige korrekte Bearbeitung der Aufgabe auf der Basis der ersten Textoptimierung. Sie verwendet für die Zielperson verstehbare angemessene Fachausdrücke und beschreibt Strategien. Ziel ist, dass die Schülerin oder der Schüler sie lesen und verstehen kann. Ein weiteres Ziel sind Hinweise, wie dieses Kind individuell anzusprechen ist.

Typische Beispiele von Eigenproduktionen und adaptiven Rückmeldungen dazu

Zur Illustration des Vier-Punkte-Konzeptes wurden hier sieben Eigenproduktionen von Schülerinnen und Schülern der Jahrgangsstufe 3 ausgewählt. Sie zeigen sämtlich ein offenbar typisches begrenztes Vermögen in der Schriftsprache. Ein Problem sieht der Autor darin, dass den Kindern möglicherweise nicht klar ist, wie die Adressaten ihrer Begründung zu denken sind. Das betrifft zum einen die Basis der Argumentation, zum zweiten die Wahl angemessener Bezeichnungen.

Vorgestellt werden Vorschläge zu adaptiven Rückmeldungen auf der Basis dieser sieben deutlich unterschiedlichen Eigenproduktionen aus der Pilotierung zu VERA3 im Jahre 2018.

Die zitierten Rückmeldungen stammen aus Seminaren im Studiengang L1 (Primarstufe) an der Universität Kassel. Sie wurden in Teams zu je 3 Studierenden konsensuell erstellt.

Beispiel 1 „6 kestchen breit“

Angekreuzt wurde „Ja“. In die Figur wurde nichts eingetragen.

Lesbares Transkript: *Weil beide Figuren 6 kestchen breit sind*

Deutung: Möglicherweise ist das Wort „breit“ im Sinne von „groß“ gemeint. „kestchen“ meint ein Quadrat aus 2 Dreiecken. In diesem Fall liegt eine korrekte Strategie vor, gruppiertes Zählen in beiden Figuren.

Sprachsensible erste Textoptimierung: *Weil beide Figuren 6 Kästchen groß sind.*

Zweite adressierte Textoptimierung: *Aus zwei Dreiecken kann ich ein Kästchen bauen. Beide Figuren haben so viele Dreiecke, dass man daraus jeweils sechs Kästchen bauen kann. Deshalb sind die Flächen der beiden Figuren gleich groß.*

Beispiel 2 „Viereck in der Mitte“
Angekreuzt wurde „Ja“. In die Figur wurde nichts eingetragen.
Lesbares Transkript: *bei beiden ist in der Mitte ein Viereck. ~~und dadrum~~*
Deutung: Die Bearbeitung wurde möglicherweise abgebrochen. Das Durchgestrichene verweist auf einen korrekten Ansatz.
Sprachsensible erste Textoptimierung: *Bei beiden Figuren ist in der Mitte ein großes Viereck aus 8 Dreiecken. Und dadrum herum haben beide Figuren noch vier Dreiecke.*
Zweite adressierte Textoptimierung: *Bei beiden Figuren ist in der Mitte ein großes Viereck aus 8 kleinen Dreiecken. Bei beiden Figuren liegen da drum herum noch 4 kleine Dreiecke. Beide Figuren bestehen aus 12 kleinen Dreiecken. Deshalb sind die Flächen der beiden Figuren gleich groß.*

Beispiel 3 „insgesamt sechs kestchen“
Angekreuzt wurde „Ja“. In die Figur wurde nichts eingetragen.
Lesbares Transkript: *Weil beide Figuhren insgesamt aus 6 kestchen besteht.*
Deutung: „kestchen“ meint ein Quadrat aus 2 Dreiecken. Es liegt eine korrekte Strategie aus Umordnen und gruppiertem Zählen vor.
Sprachsensible erste Textoptimierung: *Weil beide Figuren aus 6 Kästchen bestehen, wenn man die linke Figur passend umbaut.*
Zweite adressierte Textoptimierung: *Aus zwei Dreiecken kann ich ein Kästchen bauen. Die rechte Figur besteht aus 6 Kästchen. Die linke Figur baue ich so um, dass sie auch aus 6 Kästchen besteht. Deshalb sind die Flächen der beiden Figuren gleich groß.*

Beispiel 4 „12 Quadrate“
Angekreuzt wurde „Ja“. In die Figur wurden 24 Punkte eingetragen.
Lesbares Transkript: *Beide haben 12 Quadrate.*
Deutung: Die Bezeichnung „Quadrat“ wird falsch verwendet, gemeint sind Dreiecke. Dies indizieren die 24 Punkte, die wohl beim Zählen durch Antippen entstanden sind.
Sprachsensible erste Textoptimierung: *Beide haben 12 Dreiecke.*
Zweite adressierte Textoptimierung: *Alle kleinen Dreiecke sind gleich groß. Beide Figuren kann man jeweils aus 12 Dreiecken zusammensetzen. Deshalb sind die Flächen der beiden Figuren gleich groß.*

Beispiel 5 „Dreiecke 12 mal"
Angekreuzt wurde „Ja". In die Figur wurde nichts eingetragen.

Lesbares Transkript: *weil die Dreiecke 12 mal ist und bei dem anderen gibt es auch 12 mal dreiecke*

Deutung: Es wird korrekt mit der Flächeneinheit „dreieck" gezählt. Die Dreiecke werden als gleich groß angesehen.

Sprachsensible erste Textoptimierung: *weil die eine Figur aus 12 Dreiecken besteht und die andere auch aus 12 Dreiecken besteht*

Zweite adressierte Textoptimierung: *Die Flächen der beiden Figuren sind gleich groß, weil die eine Figur aus 12 Dreiecken gebaut ist und die andere auch.*

Beispiel 6 „3eck vertascht"
Angekreuzt wurde „Ja". In die Figur wurde nichts eingetragen.

Lesbares Transkript: *wenn man die 3 ecke vertascht an andere Stellen, dann ist es gleich groß*

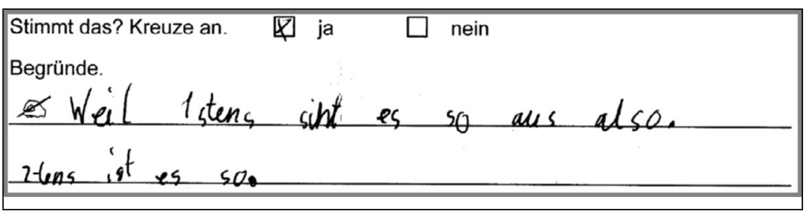
Deutung: Es wird eine korrekte Strategie aus Zerlegen und Umordnen verwendet. Die Flächengleichheit wird geschlossen, ohne das Flächenmaß zu erwähnen.

Sprachsensible erste Textoptimierung: *Wenn man die Dreiecke an andere Stellen legt, ist die Fläche genauso groß wie vorher.*

Zweite adressierte Textoptimierung: *Ich kann die linke Figur zu der rechten umbauen, dabei lege ich die Dreiecke an andere Stellen. Ihr Flächeninhalt insgesamt bleibt dabei gleich groß. Deshalb sind die Flächen der beiden Figuren gleich groß.*

Beispiel 7 „sieht so aus"

Eine Besonderheit bilden Eigenproduktionen, die auf verschiedene Art den didaktischen Vertrag nicht einhalten, indem sie eine Aufgabe aus einem anderen Kontext heraus deuten, etwa „Das eine ist eine Windmühle und das andere nicht.", oder indem sie eine Begründung im Wesentlichen als Basis zur eigenen persönlichen Einsicht sehen. Ein ausgeprägtes Selbstbewusstsein in dieser Richtung zeigt diese Antwort:


Stimmt das? Kreuze an. ☒ ja ☐ nein

Begründe.

Weil 1stens siht es so aus also.

2tens ist es so.

Abb. 2: IQB 2017

„Darstellen“ in der Liste der prozessbezogenen Kompetenzen hat eine soziale Komponente, Darstellungen sind i.d.R. adressiert. Ein Adressatenmodell ist in den Bildungsstandards nicht beschrieben, im Sinne eines *common sense* kann man Mitschülerinnen und Mitschüler annehmen. Eine angemessene Rückmeldungen ist hier etwa: „Ich sehe das nicht. Erkläre mir das.“ Oder „Hilf mal dem Hans. Seine Antwort ist nicht vollständig.“

Desiderata, Folgerungen und Perspektiven

Bemerkenswert ist, dass alle diese Kinder ihre Kreuze beim Antworten korrekt gesetzt haben. Erst durch das Einbeziehen ihrer Texte wurden mehrere Bearbeitungen als falsch bewertet: Offiziell als richtig bewertet wurden die Beispiele 3, 5 und 6. Als falsch bewertet wurden die Beispiele 1, 2 und 4.

Diese Kinder zeigen zum Teil deutliche Probleme beim grammatisch korrekten Formulieren. Dies fordert Rückmeldungen, welche die Sprache optimieren, ohne die Kinder dabei zu verletzen. Die vorgeschlagenen Rückmeldungen enthalten jeweils Aufmerksamkeitsfokussierungen auf korrekte Bezeichnungen und Formulierungen sowie ergänzende Begründungen.

Die sprachlichen Erscheinungsbilder der Kinder sind vielfältig und zudem in laufender Veränderung. Einige Kinder verwenden sogar phonetische Schreibweisen und benötigen entsprechende Hilfe beim Schreiben. Ein Regelwerk zu sprachsensiblen Rückmeldungen ist schwierig zu schaffen, die Vielfalt der individuellen Sprachausprägungen erscheint kaum vorhersehbar. Erfolg versprechen hier ausgiebige Praxisstudien von Lehrkräften, die früh im Studium platziert sind.

Desiderata sind Studien, die nachweisen, ob und inwieweit adaptive Textrückmeldungen die Kompetenz der Kinder verbessern, etwa anhand steigender Bearbeitungserfolge oder – noch besser – anhand zunehmender Erfolge beim gemeinsamen Bearbeiten der Aufgaben in Schülerteams.

Mittlerweile werden auch die von den Aufgabenentwicklern erstellten „didaktischen Kommentare“ zu den Aufgaben aus VERA3 unter Einbeziehen von authentischen Eigenproduktionen verfasst.

Im Projekt VeraCHECK des ISQ Berlin und darauf aufbauenden Projekten in Hessen und Baden-Württemberg werden zu Aufgaben aus VERA3 Materialien entwickelt, die zur Eigenarbeit für Schülerinnen und Schüler vorgesehen sind, wobei eine fördernde Person vorwiegend sprachliche Unterstützung leistet.

Literaturverzeichnis

Clarke, Dg.; Downton, A.; Knight, R. & Lewis, G. (2006). *Mathematics Assessment for Learning: Rich Tasks and Work Samples.* Mathematics Teaching and Learning Centre, Australian Catholic University (Melbourne).

IQB (2017). Aufgaben aus der Pilotierung der Vergleichsarbeiten zur Mathematik für die Jahrgangsstufe 3. Berlin: IQB 2017.

KMK (2005). Sekretariat der Ständigen Konferenz der Kultusminister der Länder in der Bundesrepublik Deutschland (Hrsg.). *Bildungsstandards im Fach Mathematik für den Primarbereich. Beschluss vom 15.10.2004.* Luchterhand.

Narciss, S. (2008). Feedback Strategies for Interactive Learning Tasks. In J. M. Spector, M. D. Merrill, J. J. G. van Merrienboer, & M. P. Driscoll (ed.), *Handbook of Research on Educational Communications and Technology* (pp.125-144). Lawrence Erlbaum Associates.

Reimers, H., & Wollring, B. (2018). Warum ist das so? Argumentieren bei „Begründungsaufgaben". *Grundschulmagazin 4/18,* 38-43.

Prävention von Rechenschwierigkeiten im Übergang Kita-Schule

Einblicke in das Fortbildungsangebot „Prävention von Rechenschwierigkeiten (PReSch)“

Julia Streit-Lehmann, Wibke Patsch und Monika Rammert

Abstract

Die „Stärkung und Absicherung der Basiskompetenzen Lesen, Schreiben, Rechnen insbesondere für Schülerinnen und Schüler mit geringer Ausprägung der Basiskompetenzen“ (MSB NRW, 2023) ist eine zentrale Aufgabe von Grundschulen. In diesem Beitrag wird sowohl aus psychologischer als auch aus mathematikdidaktischer Perspektive von einer Mathematik-Fortbildung für Lehrkräfte und sozialpädagogische Fachkräfte an Grund- und Förderschulen im Kreis Gütersloh und in der Stadt Bielefeld berichtet, die seit 10 Jahren das Ziel verfolgt, dass dort alle Kinder am Ende der Grundschulzeit über mindestens ausreichende arithmetische Basiskompetenzen verfügen und somit auch von Rechenschwäche bedrohte Kinder ihre mathematischen Lernschwierigkeiten erfolgreich überwinden. Dazu werden die inhaltlichen und organisatorischen Bausteine der Fortbildung beschrieben und praktische Erfahrungen mit der Entwicklung und Umsetzung dargestellt. Zudem werden systembezogene, kooperationsbezogene und personenbezogene Gelingensbedingungen identifiziert, die über das Erreichen der Projektziele wesentlich entscheiden. In diesem Zusammenhang wird auch ein Einblick in die Evaluation und kontinuierliche Steuerung des Projekts gegeben. Dabei werden grundlegende Erkenntnisse und Überzeugungen zum Lehren und Lernen von Mathematik sowie zur Zusammenarbeit von Akteur:innen im Bildungssystem sichtbar.

Lehrkräftefortbildung, Prävention, Fortbildung, Rechenschwierigkeiten, Anfangsunterricht, Förderung, Einschulung, PReSch

Strukturen des PReSch-Projekts

Die Gestaltung funktionaler mathematischer Lehr-Lernsituationen für alle Kinder gilt in der Aus-, Fort- und Weiterbildung von Lehrkräften vor dem Hintergrund zunehmender Heterogenität der Kinder und ihrer Familien als große Herausforderung. Aktuelle Bildungsstudien zeigen, dass am Ende der Grundschulzeit etwa ein Viertel der Kinder nicht über die notwendigen

Mindestvoraussetzungen verfügt, um die bislang erworbenen mathematischen Kompetenzen in der Sekundarstufe erfolgreich zu vertiefen und auszubauen (vgl. Stanat et al., 2021). Mathematiklehrkräften gelingt es nicht in ausreichendem Maße, insbesondere diejenigen Schüler:innen beim Rechnen Lernen zu unterstützen, die aufgrund ihrer Lernausgangslage besonderer Unterstützung bedürfen. Die Ursachen dafür sind vielfältig und liegen auch in den personellen und fachlichen Ressourcen von Schulen, etwa in der mathematikdidaktischen Expertise von Lehrkräften hinsichtlich der Früherkennung und Verhinderung von Rechenschwierigkeiten. Die Notwendigkeit wirksamer Fortbildungsangebote in diesem Bereich wird schon seit längerem auch von Lehrkräften festgestellt (vgl. Daschner & Hanisch, 2019, S.16) und kann damit als allgemeiner Konsens gelten.

Der historische Vorläufer des Projekts „Prävention von Rechenschwierigkeiten“, kurz: PReSch, von dem in diesem Beitrag berichtet wird, ist das Projekt „Förderung rechenschwacher Schülerinnen und Schüler“, kurz: Försch, das seit den 2000er Jahren von Prof. Dr. Wilhelm Schipper an der Universität Bielefeld geleitet wurde. Bei Försch konnten Mathematik unterrichtende Lehrkräfte lernen, wie sie rechenschwache Kinder besonders in den Klassenstufen 3 und 4 beim Rechnen Lernen unterstützen können. Die Försch-Inhalte basierten auf den Erfahrungen, die Schipper und sein Team in der Beratungsstelle für Kinder mit Rechenschwierigkeiten in Kooperation mit der Bildungs- und Schulberatung Bielefeld gemacht hatten (vgl. Schipper, Behrmann & Duden, 2007).

2014 wurde dieser Fortbildungsansatz aufgegriffen und inhaltlich weiterentwickelt: Die Schulpsychologischen Beratungsstellen und die Schulämter inklusive der dazugehörigen Kompetenzteams der Stadt Bielefeld und des Kreises Gütersloh schlossen sich mit der Reinhard Mohn Stiftung zusammen und bilden seitdem eine Verantwortungsgemeinschaft, die das hochgesteckte Ziel verfolgt, dass alle Kinder der am PReSch-Projekt teilnehmenden Schulen am Ende der Grundschulzeit über mindestens ausreichende arithmetische Basiskompetenzen verfügen. Bei PReSch stand von Beginn an die namensgebende Prävention von Rechenschwierigkeiten im Vordergrund: Die teilnehmenden Lehrkräfte und sozialpädagogischen Fachkräfte lernen, Schulanfänger:innen mit gering entwickelten mathematischen Vorläuferfertigkeiten bereits kurz nach der Einschulung zu erkennen und wirksam zu fördern. Mit diesem Fortbildungsangebot sollen sämtliche Grund- und Förderschulen im Kreis Gütersloh und in der Stadt Bielefeld erreicht werden.

Aufgaben und Ressourcen der Kooperationspartner:innen

Alle PReSch-Kooperationspartner:innen sind in einer Steuergruppe vertreten, in der sämtliche Entscheidungen hinsichtlich der inhaltlichen Ausrichtung und der Ressourcenplanung im Konsens getroffen werden.

Dabei bringen die Kooperationspartner:innen ihre jeweils spezifischen Expertisen und Ressourcen ein: Die **Schulämter** können durch die Nähe zu den Schulleitungen eine hohe Verbindlichkeit herstellen und sorgen zudem für Entlastung der Teilnehmenden durch Rundungsgewinne. Die **Kompetenzteams** tragen ihre Fortbildungsexpertise bei und stellen Moderationsressourcen zur Verfügung. Die **Schulpsychologie** bringt die aus der Beratung gewonnene Perspektive betroffener Kinder und deren Familien sowie eine hohe Evaluationsexpertise ein. Ziel der **Reinhard Mohn Stiftung** ist es, regionale Projekte zu unterstützen, die alle Kinder und Jugendlichen so fördern, dass sie ihre Potenziale bestmöglich entfalten können. Sie stellt nicht nur finanzielle Ressourcen zur Verfügung, sondern insbesondere das Know-how in allen Fragen des Projektmanagements. Durch die enge Zusammenarbeit mit Expert:innen der **Universität Bielefeld** wird die wissenschaftliche Fundierung der Fortbildungsinhalte sichergestellt. Die Projektleitung koordiniert das Projekt und setzt die gemeinsam getroffenen Entscheidungen um, indem sie Arbeitsgruppen oder einzelne Auftragnehmer:innen mit konkreten Aufgaben bezüglich der Durchführung und Weiterentwicklung von Projektbausteinen betraut.

Bislang wurden im PReSch-Projekt rund 500 Lehrkräfte und sozialpädagogische Fachkräfte an 115 Schulen fortgebildet (Stand Juli 2025).

Struktur und Bausteine der PReSch-Fortbildung

Ein PReSch-Fortbildungsjahr entspricht der Dauer eines Schuljahres. In dieser Zeit nehmen alle Teilnehmenden an vier dreistündigen Input-Veranstaltungen teil, in denen durch Lehrpersonen der Universität Bielefeld fachdidaktische Inhalte vermittelt werden. Aufgegriffen und vertieft werden die Inhalte der Input-Veranstaltungen in acht über das Schuljahr verteilten, 90-minütigen Kleingruppentreffen. In jeder Kleingruppe arbeiten sechs bis sieben Teilnehmende mit einer:m Moderator:in fest über das ganze Fortbildungsjahr zusammen. Bei den Kleingruppentreffen stehen der intensive Austausch über die Förderpraxis sowie gemeinsames Erproben und Reflektieren von Förderaktivitäten im Vordergrund. Den größten Anteil am Workload der Teilnehmenden hat jedoch die Planung, Durchführung und Dokumentation der Diagnostik und Förderung im schulischen Alltag. Die Teilnehmenden planen und halten wöchentlich eine Förderstunde für eine Fördergruppe mit maximal vier Kindern. Die Förderarbeit wird von den Teilnehmenden in jeder Woche schriftlich dokumentiert, und zu dieser Dokumentation erhalten sie unmittelbar fachliches Feedback von ihren Moderierenden. Durch diese engmaschige Begleitung entsteht zwischen Teilnehmenden und Moderierenden eine vertrauensvolle Arbeitsbeziehung, die es erlaubt, professionelles Handeln zu deprivatisieren, zu reflektieren und kontinuierlich weiterzuentwickeln.

Der Aufbau der PReSch-Fortbildung entspricht sowohl hinsichtlich der inhaltlichen Ausrichtung als auch hinsichtlich der methodisch-didaktischen Gestaltung wesentlichen Merkmalen wirksamer Lehrkräftefortbildung (vgl. Lipowsky & Rzejak, 2021). Insbesondere sind hier zu nennen:

Fokussierung auf zentrale unterrichtliche Anforderungen: Die Diagnostik von Lernständen, die Gestaltung von Aufgaben und das Stellen geeigneter Fragen gehören zu den „core practices" (ebd., S. 37) von Lehrkräften. Diese stehen auch bei PReSch im Fokus.

Inhaltliche Fokussierung: In PReSch werden die mathematischen Vorläuferfähigkeiten von Kindern erfasst und Basiskompetenzen in den Blick genommen. Neben dieser fachlichen Spezifizierung setzen sich die Teilnehmenden mit der Gestaltung eines wirksamen Förderarrangements auseinander, indem sie konsequent die PReSch-Grundsätze zur Kompetenzorientierung, zur Ko-Konstruktion, zur Sprache und zum Einsatz von Material beachten.

Verknüpfung von Input-, Erprobungs- und Reflexionsphasen: Durch den oben beschriebenen Aufbau eines PReSch-Jahres haben die Teilnehmenden vielfältige und langfristig angelegte Möglichkeiten Wissen zu erwerben, ihr Handeln zu erproben und Erfahrungen zu reflektieren und in neue Praktiken weiterzuentwickeln.

Feedback und Coaching: Mit dem kontinuierlichen Feedback zu den von den Teilnehmenden erstellten Dokumentationen ihrer Förderstunden unterstützen die Moderierenden den Transfer der Fortbildungsinhalte in die Praxis, regen zur anhaltenden und vertieften Auseinandersetzung an und machen für die Teilnehmenden auf diese Weise ihre schulpraktischen Erfolge sowie weitere Entwicklungspotenziale sichtbar.

Angemessene Fortbildungsdauer: Die PReSch-Fortbildung zielt darauf ab, Kinder, die aufgrund fehlender Vorläuferfähigkeiten Gefahr laufen, Rechenschwierigkeiten zu entwickeln, intensiv und langfristig zu fördern. Die Dauer der Fortbildungsmaßnahme ist an dieses Ziel angepasst.

Inhalte der PReSch-Fortbildung

In den vier Input-Veranstaltungen erhalten die Teilnehmenden grundlegende Informationen über die Diagnostik und Förderung früher mathematischer Kompetenzen. In Input 1 steht die Diagnostik im Vordergrund, um in den Wochen nach der Einschulung diejenigen Erstklässler:innen zu identifizieren, die einen noch nicht ausreichenden Entwicklungsstand hinsichtlich ihrer Zahlbegriffsentwicklung bzw. ihrer mathematischen Vorläuferfähigkeiten aufweisen. Daraufhin stellt jede teilnehmende Person eine eigene PReSch-Fördergruppe mit maximal vier entsprechenden Erstklässler:innen zusammen. In allen Inputs werden sogenannte

Förderschwerpunkte (kurz: FSP) thematisiert, die praktisch Groblernziele bezeichnen. In den circa monatlich stattfindenden Kleingruppentreffen erarbeiten die Teilnehmenden zu diesen Förderschwerpunkten Ideen für konkrete Aktivitäten, die sie in ihren Fördergruppen umsetzen. In typischen PReSch-Förderstunden stehen jeweils ein oder zwei Förderschwerpunkte für ein Kind im Vordergrund. Zu diesem/n Förderschwerpunkt/en werden dann mehrere Aktivitäten („Förderformate") angeboten. Die Strukturierung der Förderaktivitäten mit Hilfe der im Folgenden knapp skizzierten Förderschwerpunkte erlaubt eine hoch ökonomische und gleichzeitig präzise Planung und Dokumentation der Förderung (vgl. Fricke & Streit-Lehmann, 2015).

Förderschwerpunkt 1 zielt auf pränumerische Kompetenzen wie beispielsweise Sortieren, Ordnen und Vergleichen ab.

Förderschwerpunkt 2 umfasst alle Kompetenzen rund ums Zählen, insbesondere das Abzählen realer oder ikonisch repräsentierter Zählobjekte sowie das verbale Zählen vorwärts, rückwärts, in Schritten, ggf. am ordinalen Material.

Förderschwerpunkt 3 umfasst die quasi-simultane Mengenauffassung, also die Wahrnehmung von Mengen auf einen Blick, beispielsweise das schnelle Sehen unstrukturierter Mengen im Zahlenraum bis 10 durch spontane Eigenstrukturierungen („drei hier vorne, zwei da oben, und dann noch drei an der Seite"), das schnelle Sehen unterschiedlicher strukturierter Mengendarstellungen (z. B. Fingerbilder, Würfelbilder, Plättchen im Zehnerfeld, Plättchen im Zwanzigerfeld, Perlen am Perlenstab, Perlen am Rechenrahmen) sowie die simultane und quasi-simultane Anzahlbestimmung, ggf. unter Nutzung und Anwendung von Konventionen am strukturierten Material.

Förderschwerpunkt 4 beinhaltet Übersetzungen zwischen verschiedenen mathematikhaltigen Darstellungen. In den PReSch-Förderstunden stehen dabei Grundvorstellungen zu Zahlen im Vordergrund, insb. die möglichen Übersetzungsrichtungen zwischen dem Zahlwort, dem Zahlsymbol und diversen zugehörigen kardinalen Zahldarstellungen sowie viele unterschiedliche Strategien, solche Übersetzungsprozesse zu vollziehen.

Förderschwerpunkt 5 umfasst das Herstellen, Erkennen und Verallgemeinern von Zahlzerlegungen, insb. die Einsicht in und die Anwendung von Teil-Ganzes-Beziehungen von Mengen. Dies beinhaltet beispielsweise, reale Mengen handelnd in ihre Teilmengen zu zerlegen, ikonische Zerlegungsdarstellungen als Teil- und Ganzmengen zu deuten und diese Zahlbeziehungen sprachlich und symbolisch auszudrücken.

Diese fünf Förderschwerpunkte stehen für die meisten PReSch-Förderkinder im Vordergrund. Darauf aufbauend finden in den Förderstunden auch erste Aktivitäten zu **Förderschwerpunkt 6** statt. Er umfasst operationsbezogene und strategiebezogene Grundvorstellungen und damit gleich mehrere und relativ umfangreiche Kompetenzfelder, die sich wesentlich auf die Deutung einfacher additiver und subtraktiver Kontexte, Situationen und Darstellungen sowie auf Lösungswege von Additionen und Subtraktionen erstrecken.

Förderschwerpunkt 7 wird im Zahlenraum größer als 20 relevant: Er umfasst den Umgang mit Stellenwerten und die Einsicht in die Strukturen unseres dekadischen Stellenwertsystems und steht daher bei den PReSch-Förderkindern im ersten Schuljahr noch nicht im Fokus.

Sämtliche Kompetenzen, die in den PReSch-Förderschwerpunkten operationalisiert sind, stellen arithmetische Basiskompetenzen in dem Sinne dar, dass sie für das Weiterlernen im arithmetischen Anfangsunterricht und darüber hinaus unverzichtbar sind, gerade weil sie (nur!) grundlegende Kenntnisse und Einsichten in die strukturellen Eigenschaften von Zahlen und Operationen und deren Nutzung und Anwendung in mathematikhaltigen Situationen beinhalten. Das PReSch-Projekt erhebt damit den Anspruch, dass alle Kinder in der Primarstufe mindestens eben diese Basiskompetenzen erwerben können müssen.

Neben den Förderschwerpunkten werden in den Inputs und Kleingruppentreffen außerdem die Kennzeichen guter Förderarbeit in Form von vier sogenannten PReSch-Grundsätzen thematisiert, erprobt und reflektiert. Die vier PReSch-Grundsätze lauten wie folgt und werden kurz erläutert:

Die Prävention von Rechenschwierigkeiten…

…setzt bei den Stärken der Kinder an (Stichwort Kompetenzorientierung): Mathematisches Lernen beginnt mit der Geburt, ist also stets ein Weiterlernen. Das bedeutet, dass sinnvolle Lernangebote an das bisherige Wissen, die Erfahrungen und Kompetenzen eines Kindes möglichst unmittelbar anknüpfen. Um geeignete Lerninhalte individuell auszuwählen, ist eine diagnostische Grundhaltung notwendig: Die bereits erworbenen Kompetenzen des Kindes stellen die Lernausgangslage dar, die für die Planung weiterer Lernsituationen bekannt sein muss. Auf diese Weise werden die vorhandenen Stärken der Kinder konsequent aufgegriffen und ausgebaut.

… erfolgt in ko-konstruktiven Prozessen (Stichwort Ko-Konstruktion): In mathematischen Lern- und Verstehensprozessen müssen mathematische Konzepte und Symbole stets aktiv mit Sinn und Bedeutung gefüllt werden. Die Bedeutung von Gleichungen oder Fachbegriffen ist dabei nicht automatisch selbsterklärend, sondern muss vom Kind stets neu konstruiert, verändert, erweitert, also mental immer wieder hergestellt werden (vgl. Fthenakis, 2009). Diese kognitive Herausforderung muss jedes Kind selbst meistern, aber Lehrkräfte (und andere Kinder) haben dabei einen aktiven Part: In ko-konstruktiven Lernprozessen konstruieren Kinder und Erwachsene ihre Einsichten in Mathematik *gemeinsam*; mathematische

Entdeckungen und Einsichten werden miteinander geteilt und miteinander kontinuierlich ausgebaut. Im Vordergrund stehen dabei weder die Instruktion durch die Lehrkraft, noch das Vertrauen auf die Selbstbildung des Kindes, sondern der Austausch miteinander. Denn nur im Austausch miteinander kann mathematische Bedeutung ausgehandelt werden (vgl. Littleton & Whitelock, 2005). PReSch-Förderstunden werden daher als soziale Settings verstanden, in denen das didaktische Gespräch und das gemeinsame Tun im Vordergrund stehen. Das bedeutet auch: Das stille Bearbeiten von Hausaufgaben oder individuelles Automatisieren in Einzelarbeit mit Arbeitsblättern oder Tablets findet in PReSch-Förderstunden nicht statt, sondern wird in anderen Unterrichts- und Lernsituationen untergebracht.

… ist Spracharbeit (Stichwort Sprache): Für das Kommunizieren über Bekanntes und Neues, über Regelmäßigkeiten und Abstraktionen ist die Erarbeitung einer gemeinsamen Fachsprache notwendig. Das Vokabular dieser Fachsprache besteht aus verschiedenen Sprachmitteln: Formalbezogene Sprachmittel sind mathematische Fachbegriffe wie *Summe*, *geteilt rechnen*, *Dreieck* oder *Gleichheitszeichen*. Diese Fachbegriffe müssen gelernt, immer wieder verändert und zunehmend präzisiert werden. Der Gebrauch bedeutungsbezogener Sprachmittel wie *jeweils, auf, mehr* oder *hier vorne*, die auch in der Alltagssprache vorkommen, ist fürs Mathematik Lernen mindestens genauso wichtig wie die Fachwörter und stellt nicht nur für Kinder mit Deutsch als Zweitsprache eine große Herausforderung dar (vgl. Ruwisch & Tiedemann, 2021). Fachsprache kann man nur lernen, indem man sie gebraucht, also miteinander spricht (vgl. Prediger, 2016). Daher kommen Kinder und Förder-Lehrkräfte in PReSch-Förderstunden intensiv miteinander ins Gespräch: Denk- und Rechenwege werden in Worte gefasst, deren Unterschiede und Gemeinsamkeiten werden beschrieben, Vermutungen geäußert und Erkenntnisse begründet und verallgemeinert.

… erfolgt vom Konkreten zum Abstrakten (Stichwort Material): Bei der Erarbeitung neuer Inhalte werden konsequent Veranschaulichungen auf Handlungsebene gewählt. Das didaktische Material und die damit intendierten Handlungen sollen eine maximale strukturelle Passung zu der mathematischen Idee aufweisen, die veranschaulicht werden soll (vgl. Schulz, 2014). In den PReSch-Förderstunden werden konkrete Veranschaulichungen zunehmend abstrahiert und diese Abstraktionen sprachlich begleitet und reflektiert. Abstraktion kann dabei innerhalb der Handlungsebene passieren, z. B. vom Handeln mit Alltagsgegenständen hin zum Handeln an didaktischem, strukturiertem Material. Zudem erfolgt Abstraktion intermodal, also durch einen Wechsel der Darstellungsebenen, z. B. von der Durchführung eigener Handlungen hin zu bildlichen Handlungsdarstellungen. Solche intermodalen Transfers sind extrem lernförderlich (vgl. Schulz &

Wartha, 2021, S. 13). In der PReSch-Fortbildung können die Teilnehmenden die notwendige Fachkenntnis des jeweiligen mathematischen Inhalts entwickeln und ausbauen, um zu entscheiden, welche Darstellungsebenen und Veranschaulichungen sie für welchen mathematischen Inhalt und welches Lernziel auswählen.

Die konsequente Berücksichtigung der PReSch-Grundsätze in mathematischen Lehr-Lernsituationen trägt dazu bei, dass alle Kinder mindestens basale arithmetische Kompetenzen erwerben können und Rechenschwierigkeiten somit verhindert werden. Für die Teilnehmenden ist die Berücksichtigung der PReSch-Grundsätze in ihrer Förderarbeit nicht selbstverständlich; hinter jedem Stichwort verbergen sich eigene individuelle und situative Hürden. Vielen Teilnehmenden ist beispielsweise bereits vor der Teilnahme am PReSch-Projekt klar, dass fehlende bzw. nicht ausreichend ausgebildete Vorkenntnisse bei Kindern die erfolgreiche Durchdringung eines mathematischen Gegenstands erschweren und daher die individuelle Lernausgangslage eines Kindes Einfluss auf seinen Lernerfolg hat. Für die Gestaltung passgenauer Lehr-Lernsituationen muss jedoch einerseits eine umfassende fachdidaktische und fachliche Expertise zu arithmetischen Konzepten und Inhalten sowie zu den jeweils notwendigen, spezifischen Vorkenntnissen vorhanden sein, und andererseits muss der aktuelle Entwicklungsstand spezifischer Vorkenntnisse eines Kindes genau bekannt sein und streng auf die arithmetischen Inhalte, die in der „Zone der nächsten Entwicklung" (Wygotski, 1987) des Kindes liegen, bezogen werden. Eine der Überzeugungen, die im PReSch-Projekt sichtbar werden, lautet: Jedes Kind hat *irgendwelche* mathematischen Kompetenzen. Die Leitfrage für die Planung von Lernsituationen in den PReSch-Förderstunden ist daher nicht: Was fehlt dem Kind noch, was müsste es können? Sondern es wird vom Kind aus gedacht: Was kann und weiß das Kind schon, an das sich sinnvoll anknüpfen lässt? Die konsequente Orientierung an den vorhandenen Kenntnissen des Kindes – etwa in Abgrenzung zur Orientierung an Stoffverteilungsplänen und an den Erwartungen von Kolleg:innen oder Eltern – ist für die meisten Teilnehmenden eine Entwicklungsaufgabe.

Implementierung und Umsetzung

Da an der Umsetzung des PReSch-Projekts viele Akteur:innen beteiligt sind und sich zeitgleich politische Rahmenbedingungen und gesellschaftliche Herausforderungen, die in die Schule hineinwirken, immer wieder ändern, müssen kontinuierlich Hürden überwunden werden. Einige davon sollen hier nachgezeichnet werden, sowie auch die (Gegen-)Steuerungsmöglichkeiten, die im PReSch-Projekt zur Verfügung stehen.

Praktische Hürden und Steuerungswerkzeuge

In Zeiten knapper personeller Ressourcen, hoher Krankenstände und großer Klassenstärken wird mit der PReSch-Fortbildung eine für die Teilnehmenden sehr arbeitsintensive Maßnahme umgesetzt. An den Schulen muss dazu eine entsprechende Stundenplanung vorhanden sein, außerdem das Verständnis dafür, was die einzelne Lehrkraft oder Fachkraft leistet, sowie die Perspektive eines langfristigen Nutzens der erworbenen Kompetenzen für das System. Diese Gelingensbedingungen werden den Schulleitungen der Teilnehmenden parallel zur ersten Input-Veranstaltung durch Vertreter:innen der PReSch-Steuergruppe vermittelt. Da in der Gruppe der Schulleitungen in jedem neuen Fortbildungsjahr Personen mit unterschiedlichen Vorerfahrungen zu PReSch zusammenkommen, gibt es auch die Möglichkeit, bereits erprobte Umsetzungsideen auszutauschen oder Veränderungswünsche an das Projekt weiterzugeben. Eine schriftliche Handreichung mit Anforderungen und Umsetzungstipps für Schulleitungen ergänzt diesen Termin und sorgt für Transparenz.

Die Zusammenarbeit zwischen den Teilnehmenden und den für sie zuständigen Moderierenden stellt einen wesentlichen Faktor für den Kompetenzzuwachs der Teilnehmenden und ihre Zufriedenheit mit der Fortbildung dar. Sie erfordert ein hohes Maß an Verbindlichkeit, gegenseitiges Vertrauen sowie eine umfassende Klärung der Rollen und Aufgaben der Beteiligten. Aufgaben und Absprachen hinsichtlich der Gruppentreffen und der wöchentlichen Dokumentation der Förderung vereinbaren Teilnehmende und Moderierende zu Beginn des Fortbildungsjahres schriftlich miteinander.

Um die Teilnehmenden bei der Förderung der Kinder fachlich-kollegial beraten zu können, entwickeln die PReSch-Moderierenden im Rahmen einer eigens konzipierten Schulung ein professionelles Verständnis ihrer Rolle. Zudem können sie in regelmäßig stattfindenden Arbeitstreffen fachliche Fragen klären, Unsicherheiten und Probleme in der Zusammenarbeit mit den Teilnehmenden bearbeiten und Lösungsmöglichkeiten reflektieren. Moderierende, die sich seit vielen Jahren bei PReSch engagieren, sichern die Kontinuität und tragen gleichzeitig durch ihren Erfahrungsschatz wesentlich zur steten Weiterentwicklung des PReSch-Projekts bei.

Evaluation und Weiterentwicklung

Zur Überprüfung der Wirksamkeit der PReSch-Fortbildung wurden im Laufe der Jahre verschiedene Evaluationsmaßnahmen durchgeführt. Zunächst war von vorrangigem Interesse, ob sich bei den geförderten Kindern ein Leistungszuwachs nachweisen lässt. Dazu wurden Vorher-Nachher-Vergleiche der Basiskompetenzen bei den n=72 Kindern angestellt, die 2016/17 an einer PReSch-Förderung teilgenommen haben und deren Kompetenzen mit dem EMBI (Flottmann, Streit-Lehmann & Peter-Koop, 2021) erhoben wurden.

Dabei zeigten sich deutliche Fortschritte vom Pre- zum Post-Test in allen Bereichen. Beim Post-Test erreichen 82 % der Kinder mindestens Ausprägungsgrad 2 im Bereich Zählen, dies war im Pre-Test nur bei 15 % der Fall. Während beim Pre-Test zu Beginn des 1. Schuljahres für 100 % der Kinder die Aufgaben aus den Kompetenzbereichen Stellenwerte, Addition/Subtraktion und Multiplikation/Division noch gar nicht bearbeitbar waren, erreichten beim Post-Test 75 % der Kinder Ausprägungsgrad 1 bei den Stellenwerten, 35 % Ausprägungsgrad 3 bei der Addition/Subtraktion und 42 % Ausprägungsgrad 2 im Bereich der Multiplikation/Division. Diese positiven Ergebnisse ließen sich auch in anderen Jahren nachweisen, so dass in der Folge auf die aufwändigen Auswertungen (zunächst) verzichtet werden konnte.

Eine zweite, ebenso wesentliche Ebene der Wirksamkeitsüberprüfung betrifft die teilnehmenden Lehrkräfte, hier insbesondere deren selbst wahrgenommene Kompetenz und Selbstwirksamkeitsüberzeugungen. Die Relevanz dieses psychologischen Konstruktes, das auf Bandura (1997) zurückgeht, konnte in zahlreichen Studien gezeigt werden: Schmitz & Schwarzer (2002) beschreiben Lehrkräfte mit hohen positiven Selbstwirksamkeitsüberzeugungen als engagierter, leistungsfähiger und verantwortungsbewusster und schreiben ihnen eher die Fähigkeit zu, ihren Unterricht qualitativ hochwertig zu gestalten. Einige Autor:innen konnten nachweisen, dass sich die Selbstwirksamkeitsüberzeugungen von Lehrkräften neben der Unterrichtsqualität auch auf die Motivation der Lernenden auswirken (vgl. Gebauer, 2013; Kocher, 2014). In Tabelle 1 sind einige Ergebnisse aus einer Fragebogenerhebung zu sehen, an der sich 66 Teilnehmende aus den Schuljahren 2015/16 und 2016/17 beteiligt haben.

	pre		**post**	
	–	+	–	+
Ich bin im Stande, „Risiko-Kinder“ (in Bezug auf das Mathematiklernen) im Anfangsunterricht sicher zu erkennen.	27	73	0	100
Ich habe Vertrauen in meine Fähigkeiten, Schülerinnen und Schüler mit Rechenschwierigkeiten in gezielten Fördermaßnahmen sinnvoll fördern zu können.	33	67	0	98
Ich schaffe es gut, Schülerinnen und Schüler mit Rechenschwierigkeiten im „normalen“ Mathematikunterricht zu unterstützen.	67	33	17	83

Tabelle 1: Antwortraten der Teilnehmenden in %, n=66, Antwortmöglichkeiten „trifft (eher) nicht zu“(–) und „trifft (eher) zu“ (+)

Es zeigten sich durchweg positive Effekte in der selbst wahrgenommenen Kompetenz sowohl im Hinblick darauf, Kinder mit Rechenschwierigkeiten zu erkennen und gezielt zu fördern, als auch hinsichtlich eines präventiven und teilweise interventiven Mathematikunterrichts, was auch in den Folgejahren immer wieder in (dann qualitativ angelegten) Evaluationen bestätigt wurde.

Das zehnjährige Bestehen des Projekts wurde zum Anlass genommen der Frage nachzugehen, ob und wie die Teilnahme an PReSch auch auf Schulebene zu Veränderungen geführt hat. Dazu nahmen 113 (ehemalige) Teilnehmende und Schulleitungen an einer Fragebogenerhebung teil. Besonders erfreulich ist dabei der Befund, dass 66 % der Befragten angaben, dass an ihrer Schule regelmäßig Förderstunden im PReSch-Format (also wöchentlich, mit höchstens vier Kindern, basierend auf diagnostischen Befunden und unabhängig vom aktuellen Schulstoff) stattfinden, auch wenn die Teilnahme an PReSch teilweise schon länger zurückliegt. Ein weiteres ermutigendes Ergebnis betrifft den Einfluss der Fortbildungsteilnahme auf den Mathematikunterricht. 86 % der befragten Lehrkräfte gaben an, dass sich ihr Mathematikunterricht durch die Teilnahme an PReSch langfristig geändert habe. Aus den offen formulierten Antworten konnte qualitativ-inhaltsanalytisch herausgearbeitet werden, dass zunehmend PReSch-Inhalte in den Unterricht integriert werden, vermehrt Entwicklungsbeobachtung zu frühzeitiger Förderung führen, dass der Fokus stärker auf den Erwerb von zahlbezogenen Kompetenzen gerichtet wird und dass Einstellungsänderungen mit einer veränderten Didaktik einhergehen. Die Frage nach möglichen Problemen bei der Umsetzung der PReSch-Inhalte im regulären Mathematikunterricht wurde am häufigsten mit begrenzten Differenzierungsmöglichkeiten beantwortet. Weitere Probleme sahen die Lehrkräfte in strukturellen Rahmenbedingungen sowie in zeitlichen Ressourcen. Diese Befunde sind Anlass für die aktuelle Weiterentwicklungen des PReSch-Projekts hinsichtlich eines stärkeren Fokus auf den Transfer in den Regelunterricht.

Fazit: Gelingensbedingungen und Implikationen

In diesem Beitrag wurde dargestellt, wie organisatorische, strukturelle und inhaltliche Aspekte eines Fortbildungsangebots mit dem Ziel der nachhaltigen Förderung mathematischer Basiskompetenzen ineinandergreifen. Studien zu den Aspekten wirksamer Lehrerfortbildung lieferten die Orientierung bei der strukturellen Ausgestaltung der Fortbildung. Durch die fachliche Expertise erfahrener Lehrkräfte und Universitäts-Mitarbeitenden – hier ist maßgeblich auch Andrea Peter-Koop zu nennen – konnten die zu vermittelnden Inhalte immer wieder aktualisiert, adaptiert und ausgeschärft werden. Aus dieser inhaltlichen Arbeit sind auch die PReSch-Grundsätze hervorgegangen, die eine funktionale Grundlage für die Förderarbeit an PReSch-Schulen darstellen.

Darüber hinaus tragen systemische Faktoren maßgeblich zum Erfolg des PReSch-Projekts bei. Alle Akteur:innen begreifen PReSch als *lernendes System*, das sich verändernden Bedingungen und Herausforderungen anpasst. Dies ist nur mit einer Steuergruppe möglich, die sich nicht als „Kick-off"-Gremium versteht und als solches lediglich ein Projekt an den Start bringt, sondern die beständig beobachtet, auswertet und darauf basierend den kontinuierlichen Einsatz von Ressourcen steuert, um dabei Projektstrukturen zu etablieren und zu verstetigen. Der Einsatz verschiedener Arbeits- und Konzeptgruppen, die u.a. in monatlichen Arbeitstreffen anstehende Herausforderungen „vordenken", hat sich als weiterer wertvoller Faktor erwiesen. Für die Umsetzung der Beschlüsse der Steuergruppe sowie deren transparente, verbindliche Dokumentation und Kommunikation sorgt ein zweiköpfiges Projektleitungs-Team. Bemerkenswert ist, dass trotz der personell schwierigen Situation der Schulen und trotz des hohen Workload, der seitens der Teilnehmenden mit der Teilnahme an der Fortbildung bekanntermaßen verbunden ist, die Anmeldezahlen seit Jahren so hoch sind, dass regelmäßig Schulen bzw. Teilnehmende auf die Warteliste fürs nächste Schuljahr gesetzt werden müssen. Ebenso bemerkenswert sind eine praktisch nicht existente Abbruchquote während eines Fortbildungsjahres sowie die hohe Identifikation aller Akteur:innen mit dem Projekt, die vielfach in hohem Engagement und in langjähriger Zugehörigkeit sichtbar wird. Der hochfrequente fachliche Austausch zwischen Teilnehmenden und Moderierenden wird von allen Beteiligten – ganz im Sinne der Ko-Konstruktion – als zentrales Element für die Sicherung des Fortbildungserfolgs eingeschätzt.

Literaturverzeichnis

Bandura, A. (1997). *Self-efficacy. The exercise of control.* Freeman.

Daschner, P. & Hanisch, R. (Hrsg.) (2019). *Lehrkräftefortbildung in Deutschland. Bestandsaufnahme und Orientierung.* Beltz Juventa,

Flottmann, N., Streit-Lehmann, J. & Peter-Koop, A. (2021). *Elementar-Mathematisches BasisInterview. Zahlen und Operationen. Handbuch Diagnostik.* Mildenberger.

Fricke, S. & Streit-Lehmann, J. (2015). Zum Einsatz von Entwicklungsplänen im inklusiven arithemetischen Anfangsunterricht. In A. Peter-Koop, T. Rottmann & M. Lüken (Hrsg.), I*nklusiver Mathematikunterricht in der Grundschule.* Mildenberger. S. 168-180.

Fthenakis, W. E. (2009). Ko-Konstruktion: Lernen durch Zusammenarbeit. *Kinderzeit online – Zeitschrift für Pädagogik und Bildung,* 3, 2009.

Gebauer, M. M. (2013). *Determinanten der Selbstwirksamkeitsüberzeugung von Lehrenden. Schulischer Berufsalltag an Gymnasien und Hauptschulen.* Springer Fachmedien.

Kocher, M. (2014). *Selbstwirksamkeit und Unterrichtsqualität. Unterricht und Persönlichkeitsaspekte im Berufsübergang von Lehrpersonen.* Waxmann.

Lipowsky, F. & Rzejak, D. (2021). *Fortbildungen für Lehrpersonen wirksam gestalten.* Bertelsmann-Stiftung. DOI 10.11586/2020080

Littleton, K. & Whitelock, D. (2005). The negotiation and co-construction of meaning and understanding within a postgraduate online learning community. In: *Learning, Media and Technology,* 30(2), S.147-164.

MSB NRW (2023). *Verbindlichkeit, Verlässlichkeit und klare Schwerpunktsetzungen - Stärkung der Basiskompetenzen.* https://www.schulministerium.nrw/verbindlichkeit-verlaesslichkeit-und-klare-schwerpunktsetzungen-staerkung-der-basiskompetenzen

Prediger, S. (2016). *Wer kann es auch erklären? Sprachliche Lernziele identifizieren und verfolgen.* In: *Mathematik differenziert,* 7 (2), S. 6-9.

Ruwisch, S. & Tiedemann, K. (2021). Sprache als Lernmedium im Fachunterricht. In M. Michalak, (Hrsg.), *Theorien und Modelle für das sprachbewusste Lehren und Lernen.* 3. überarbeitete und erweiterte Auflage. Schneider. S. 34-52.

Schipper, W., Behrmann, M. & Duden, K. (2007). *Försch – Förderung rechenschwacher Schüler.* Occasional Paper 188. https://bielefelder-rechentest.de/ftp/F%C3%B6rsch.pdf

Schmitz, G. & Schwarzer, R. (2002). Individuelle und kollektive Selbstwirksamkeitserwartung von Lehrern. In M. Jerusalem & D. Hopf (Hrsg.), *Selbstwirksamkeit und Motivationsprozesse in Bildungsinstitutionen.* Beltz. S. 192-214.

Schulz, A. (2014). *Fachdidaktisches Wissen von Grundschullehrkräften: Diagnose und Förderung bei besonderen Problemen beim Rechnenlernen.* Springer.

Schulz, A. & Wartha, S. (2021). *Zahlen und Operationen am Übergang Primar-/Sekundarstufe.* Springer.

Stanat, P., Schipolowski, S., Schneider, S., Sachse, K. A., Weirich, S., Henschel, S. (Hrsg.) (2021). *IQB-Bildungstrend 2021. Kompetenzen in den Fächern Deutsch und Mathematik am Ende der 4. Jahrgangsstufe im dritten Ländervergleich.* Waxmann.

Wygotski, L. (1987). *Ausgewählte Schriften. Arbeiten zur psychischen Entwicklung der Persönlichkeit.* Pahl-Rugenstein.

Grußwort zum Abschluss

Andrea Peter-Koop ist in der deutschen mathematikdidaktischen Szene eine Person mit überragender internationaler Weitsicht und Wirkung. Ihr Doktorvater, Prof. Dr. H.-G. Steiner, hat sie früh mit einer Erkundung der australischen Lehrerbildung betraut. Von darauf basierenden Erfahrungen, Kontakten und Kenntnissen profitiert die deutsche Mathematikdidaktik bis heute, ich selbst ebenfalls. Ihre Bielefelder Prägung für soziologische Perspektiven auf den Mathematikunterricht führte sie auf Anliegen zur Diagnose und Förderung im Mathematikunterricht, entscheidend beeinflusst von den ethisch basierten Konzepten an der Australian Catholic University (ACU) in Melbourne. Die wurde bei mehreren Aufenthalten dort zu einer mentalen Heimat für sie und für mich. Den Terminus „vulnerable strategies" haben wir von dort – und über viele Jahre immer wieder Kinder in den Blick genommen, die besonderer Aufmerksamkeit bedürfen.

Ich danke den Herausgeberinnen für die Planung und Umsetzung dieser Festschrift und wünsche der Festschrift eine breite Wahrnehmung in der deutschsprachigen Mathematikdidaktik.

Bernd Wollring

Autorinnen und Autoren

Larissa Aust ist wissenschaftliche Mitarbeiterin in der Arbeitseinheit Diagnostik und Evaluation im schulischen Kontext an der der Universität Münster. Sie studierte Psychologie an den Universitäten Bochum und Münster. Ihre Forschungsinteressen liegen im Bereich des Formativen Assessments und der Professionalisierung von Lehrkräften.

Andrea Carina Baldus arbeitete nach ihrer Ausbildung zur Grundschullehrerin ab 2010 an einer Grundschule in Düsseldorf. Seit 2014 engagiert sie sich in der Lehrerfortbildung im Kompetenzteam Düsseldorf sowie im Landesinstitut Soest in der Arbeitsgruppe VERA im Bereich Mathematik. 2015 übernahm sie im Studienseminar Solingen eine Fachleiterinnentätigkeit in Mathematik, bevor sie 2017 an die TU Dortmund ans IEEM wechselte. Dort wirkte sie in den Teams PIKAS, PIKAS-digi, Divomath und seit Sommer 2024 im FöDiMa-Team.

Prof. Dr. Christiane Benz ist Professorin für Mathematik und ihre Didaktik an der Pädagogischen Hochschule Karlsruhe. Sie forscht und lehrt, wie Kinder bei mathematischen Lernprozessen unterstützt werden können. Dafür hat sie die MachmitWerkstatt „MiniMa“ entwickelt, in der sie gemeinsam mit Kindern, Fach- und Lehrkräften und Studierenden mathematische Lehr-Lern-Prozesse gestaltet und erforscht. Ein Schwerpunkt ihrer Arbeit liegt in der Erforschung und Förderung arithmetischer Basiskompetenzen und in der Professionalisierung von Fach- und Lehrkräften. Vor ihrer Arbeit an der Hochschule war sie als Grundschullehrerin tätig.

Dr. Jennifer Bertram ist Studienrätin im Hochschuldienst an der Fakultät für Mathematik der Universität Duisburg-Essen. Zu ihren Forschungsschwerpunkten gehören verschiedene Aspekte der Professionalisierung von Lehrkräften in Aus- und Fortbildung hinsichtlich eines inklusiven Mathematikunterrichts. Dabei liegt der Fokus vor allem auf Einstellungen und Lernprozessen von (angehenden) Lehrkräften.

Prof. Dr. Dagmar Bönig ist Professorin für Mathematikdidaktik (Primar- und Elementarbereich) an der Universität Bremen. Zu den Arbeitsschwerpunkten gehören die qualitative Analyse mathematischer Vorstellungen von Kindern, die mathematikbezogene Förderung heterogener Lerngruppen und die Förderung mathematischen Lernens im Übergang von der Kita zur Grundschule.

Dr. Ilka Burhorst ist Lehrkraft für besondere Aufgaben an der Universität Vechta. Nach ihrer Promotion an der Universität Vechta absolvierte sie den Vorbereitungsdienst für das Lehramt an Grundschulen und war an einer Grundschule tätig. Zu ihren wissenschaftlichen Schwerpunkten gehören der inklusive Mathematikunterricht sowie die (Weiter-)entwicklung, Durchführung und Evaluation von Studienmodulen im Bereich Mathematik für fachfremd Studierende im Master of Education.

Dr. Donatus Coerdt arbeitete seit 2011 als Grundschullehrer und von 2018 bis 2024 als abgeordnete Lehrkraft am Institut für Didaktik der Mathematik an der Universität Bielefeld. Im Rahmen seines Promotionsprojektes untersuchte er visuell-räumliche Fähigkeiten von Kindern beim Übergang vom Kindergarten in die Grundschule und entwickelte die Neukonzeption des EMBI für den Inhaltsbereich „Raum und Form“. Er ist im Autorenteam des Forderheftes zum Mathematiklehrwerk „Welt der Zahl“ tätig und seit August 2025 Studienrat im Hochschuldienst am IDM.

Dr. Steffen Dingemans ist seit 2011 Grundschullehrer an einer Grundschule des gemeinsamen Lernens. Als abgeordnete Lehrkraft am Institut für Didaktik der Mathematik betreute er an der Universität Bielefeld bis 2023 insbesondere Lehramtsstudierende im Praxissemester. In diesem Kontext untersuchte er in seinem Promotionsprojekt die Entwicklung mathematikspezifischer diagnostischer Kompetenz der Studierenden. Für das Mathematiklehrwerk „Welt der Zahl“ ist er seit 2012 als Autor sowie Moderator verschiedener Fortbildungen und Vorträge tätig. Ein Schwerpunkt seiner Arbeit liegt in der Erstellung des Forderheftes, welches für leistungsstarke Kinder konzipiert ist.

Dr. Luise Eichholz ist Studienrätin im Hochschuldienst am Institut für Entwicklung und Erforschung des Mathematikunterrichts (IEEM) an der TU Dortmund mit dem Schwerpunkt der Lehre in der Mathematikdidaktik. Von 2014 bis 2018 hat sie als abgeordnete Lehrkraft über Lernprozesse in Fortbildungen für fachfremd Mathematik unterrichtende Lehrpersonen an der TU Dortmund promoviert. Davor war sie 18 Jahre als Grundschullehrerin in NRW tätig. Ihre Forschungsschwerpunkte liegen im Bereich der Fortbildungsfachdidaktik für Mathematiklehrpersonen in der Primarstufe.

Nina Engel ist wissenschaftliche Mitarbeiterin an der Universität Vechta. Nach dem Abschluss ihres Studiums mit dem Master of Education für Grundschulen forscht sie im Rahmen ihres Promotionsprojekts zum Thema „Zeichnerische Abstraktion von Musterfolgen“. Darüber hinaus gehören die (Weiter-)entwicklung, Durchführung und Evaluation von Studienmodulen im Bereich Mathematik für fachfremd Studierende im Master of Education zu ihren Arbeitsschwerpunkten.

Prof. Dr. Marco Ennemoser ist Professor für Psychologie und Diagnostik im Förderschwerpunkt Sprache an der Pädagogischen Hochschule Ludwigsburg. Er studierte Psychologie an der Universität Würzburg, wo er zunächst zur Prävention von Lese-Rechtschreibschwierigkeiten forschte und zum Einfluss des Fernsehkonsums auf die Entwicklung von Sprach- und Lesekompetenzen promovierte. Im Anschluss forschte und lehrte er zwölf Jahre lang an der Universität Gießen, bevor er 2016 nach Ludwigsburg wechselte. Seine aktuellen Forschungsschwerpunkte liegen im Bereich der Diagnostik und Förderung sprachlicher, schriftsprachlicher und mathematischer Kompetenzen.

Dr. Nina Flottmann arbeitet als Grundschullehrerin und Förderkoordinatorin an einer Grundschule in Bad Oeynhausen. 2023 hat sie als abgeordnete Lehrkraft bei Andrea Peter-Koop zum Thema „Fermi-Aufgaben im inklusiven Mathematikunterricht der Grundschule“ promoviert und an der Neuauflage des EMBI „Zahlen und Operationen“ mitgearbeitet.

Jörg Franks ist Schulleiter einer dreizügigen Grundschule in Lemgo und Schulbuchautor des Mathematiklehrwerks „Welt der Zahl“. Nach seinem Lehramtsstudium arbeitete er an verschiedenen Grundschulen in Ostwestfalen. Während seiner Tätigkeit als Lehrkraft leitete er Seminare zur gezielten Förderung rechenschwacher Kinder für Lehramtsstudierende und regionale Fortbildungsreihen für Lehrkräfte zum Umgang mit Rechenstörungen.

Prof. Dr. Hedwig Gasteiger ist Professorin für Mathematikdidaktik an der Universität Osnabrück. Dort ist sie Direktorin des CEDER – Center of Early Childhood Development and Education Research. Als Netzwerkpartnerin am Deutschen Zentrum für Lehrkräftebildung Mathematik engagiert sie sich bundesweit in der Qualifizierung von Lehrkräften und frühpädagogischen Fachkräften. Seit vielen Jahren begleitet sie die Erstellung nationaler Vergleichsarbeiten und arbeitet zusammen mit dem Institut zur Qualitätsentwicklung im Bildungswesen (IQB). Frühe mathematische Bildung, mathematische Kompetenzentwicklung und Professionsforschung sind Forschungsschwerpunkte ihrer Arbeit. Dabei ist ihr Praxisnähe ein echtes Anliegen.

Prof. Dr. Kerstin Gerlach ist Professorin für Mathematikdidaktik mit Schwerpunkt Inklusion an der Universität Bielefeld. Sie forscht und lehrt, wie das Lehren und Lernen von Mathematik in sozialen Settings sprachsensibel gestaltet werden kann. Zu ihren Forschungsschwerpunkten gehören dabei der Sprachgebrauch im (inklusiven) Mathematikunterricht der Grundschule, die Mehrsprachigkeit als Ressource sowie das Zusammenspiel der Sprache mit anderen Darstellungen. Methodisch liegt ihre Expertise im Bereich der Interpretativen Forschung.

Prof. Dr. Meike Grüßing ist Professorin für Mathematikdidaktik mit dem Schwerpunkt Primarstufe unter besonderer Berücksichtigung des Elementarbereichs an der Universität Vechta. Nach ihrem Lehramtsstudium war sie im Bereich der Mathematikdidaktik an der Carl von Ossietzky Universität Oldenburg und am Leibniz-Institut für die Pädagogik der Naturwissenschaften und Mathematik (IPN) tätig. Zu ihren wissenschaftlichen Schwerpunkten gehören die mathematische Kompetenzentwicklung im Elementar- und Primarbereich, Raumvorstellung sowie die mathematikbezogene Ausbildung angehender Lehrkräfte für die Primarstufe.

Dr. Raja Herold-Blasius arbeitet als wissenschaftliche Mitarbeiterin an der TU Dortmund in der Fakultät für Mathematik am Institut für Entwicklung und Erforschung des Mathematikunterrichts. Sie hat 2019 an der Universität Duisburg-Essen promoviert und vertrat 2022 eine Professur für Mathematik und ihre Didaktik der Primarstufe an der Universität Rostock. In Forschung und Entwicklung beschäftigt sie sich v. a. mit dem mathematischen Problemlösen, dem inklusiven Mathematikunterricht, der Digitalisierung im Mathematikunterricht der Primarstufe sowie der Lehrkräfteprofessionalisierung.

Prof. Dr. Jessica Hoth ist Professorin für Mathematikdidaktik mit dem Schwerpunkt Primarstufe an der Universität Rostock. Einer ihrer Forschungsschwerpunkte ist die diagnostische Kompetenz von angehenden und praktizierenden Mathematiklehrkräften. Darüber hinaus ist sie Projektleitung für den Primarstufenteil des Mathe.Kind Projekts an der Goethe-Universität, das sich mit der Diagnose und Förderung von Kindern mit Schwierigkeiten beim Mathematiklernen beschäftigt, ebenso wie für den Primarstufenteil des Projekts a² zur Diagnose und Förderung von mathematischen Basiskompetenzen von Lehramtsstudierenden zu Studienbeginn.

Prof. Dr. Karina Höveler lehrt Mathematikdidaktik mit dem Schwerpunkt Primarstufe an der Universität Münster. Nach ihrem Lehramtsstudium an der Carl von Ossietzky Universität Oldenburg und der Curtin University in Perth, Australien, absolvierte sie zunächst ihr Referendariat, bevor sie als wissenschaftliche Mitarbeiterin an der TU Dortmund arbeitete und dort zu Vorgehensweisen von Primarstufenschüler:innen zur kombinatorischen Anzahlbestimmung promovierte. In ihrer Forschung widmet sie sich neben der Kombinatorik unter anderem der Thematisierung von Mustern und Strukturen im inklusiven Mathematikunterricht.

Pia Kerstingjohänner ist seit ihrem Studienabschluss 2013 mit dem Schwerpunkt Mathematik und Sachunterricht Lehrerin an einer Grundschule in Bielefeld. Seit 2023 ist sie an das Institut für Didaktik der Mathematik der Universität Bielefeld abgeordnet und untersucht im Rahmen ihrer Promotion den Nutzen des dritten Schulbesuchsjahres in der Schuleingangsphase für das mathematische Lernen.

Lukas Knorr hat im Juni 2023 sein erstes Staatsexamen für das Lehramt an Grundschulen abgelegt. Seit Juli 2023 ist er als wissenschaftlicher Mitarbeiter am Institut für Didaktik der Mathematik und Informatik der Goethe-Universität Frankfurt tätig. Sein Forschungsschwerpunkt liegt im Bereich Größen.

Dr. Sebastian Kollhoff ist Akademischer Rat auf Zeit am Institut für Didaktik der Mathematik der Universität Bielefeld und forscht zur Entwicklung von Vorstellungen mathematischer Inhalte, Transferprozessen beim Mathematiklernen und zur interaktionalen Aushandlung der Bedeutungen von Darstellungen in alltäglichen Unterrichtsinteraktionen der Primar- und Sekundarstufe.

Prof. Dr. Kristin Krajewski studierte Psychologie an der Universität Würzburg und promovierte hier zur Früherkennung von Rechenschwäche. Es folgten Arbeiten zur mathematischen Prävention und Intervention sowie zur Gedächtnisentwicklung, bevor sie auf eine Juniorprofessur für Lern- und Leistungsstörungen ans Deutsche Institut für Internationale Pädagogische Forschung nach Frankfurt und anschließend auf eine Professur für Pädagogische Psychologie an die Universität Gießen wechselte. Heute lehrt und forscht sie als Professorin an der Pädagogischen Hochschule Ludwigsburg zur Entwicklung, Diagnostik, Prävention und Intervention von Lern- und Verhaltensschwierigkeiten.

Philipp Larmann schloss 2021 sein Lehramtsstudium für das Gymnasium mit den Fächern Mathematik und Chemie ab und arbeitet seitdem als wissenschaftlicher Mitarbeiter am Institut für Didaktik der Mathematik und Informatik der Goethe-Universität Frankfurt. Neben seinen Tätigkeiten in der Lehre und in Erasmus+ Partnerschaften zu Outdoormathematikunterricht mit digitalen Medien koordiniert er das Projekt Mathe.Kind, welches sich mit der Förderung von Kindern mit besonderen Schwierigkeiten beim Mathematiklernen beschäftigt. Sein Forschungsschwerpunkt liegt in der Erfassung subjektiver Theorien angehender Lehrkräfte.

Janina Lenhart ist wissenschaftliche Mitarbeiterin in der Arbeitsgruppe von Marcus Nührenbörger am Institut für grundlegende und inklusive mathematische Bildung (GIMB) der Universität Münster. Nach dem Studium für das Lehramt an Grundschulen an der Universität Paderborn von 2015 bis 2021 und dem Referendariat am ZfsL Münster arbeitete sie zwischenzeitlich als Vertretungslehrerin an Grundschulen in Paderborn und Münster. Seit 2023 arbeitet sie in Forschungsprojekten zum inklusiven Mathematikunterricht.

Jeanne-Celine Linker ist wissenschaftliche Mitarbeiterin in der Arbeitsgruppe von Christoph Selter am Institut für Entwicklung und Erforschung des Mathematikunterrichts (IEEM) der Technischen Universität Dortmund. Nach dem Studium für das Lehramt an Grundschulen an der TU Dortmund von 2014 – 2019 und dem Referendariat am ZfsL Bochum von 2019 bis 2021 arbeitet sie seit 2021 in Forschungsprojekten zum Mathematikunterricht.

Prof. Dr. Matthias Ludwig ist seit 2011 Professor für Didaktik der Mathematik an der Goethe-Universität in Frankfurt, davor war er neun Jahre im bayerischen Schuldienst als Physik-und Mathematiklehrer sowie acht Jahre an der Pädagogischen Hochschule Weingarten als Professor für Mathematik und ihre Didaktik. Seine Forschungsgebiete reichen von der Förderung leistungsstarker und leistungsschwacher Schüler über Anwendungen der Geometrie bis zur Anwendung von digitaler Technologie im Mathematikunterricht. Er koordiniert(e) zahlreiche kooperative Partnerschaften in der EU zu Mathtrails, Computational Thinking und mathematischem Modellieren.

Prof. Dr. Miriam M. Lüken ist seit 2013 Professorin für Didaktik der Mathematik mit Schwerpunkt frühe mathematische Bildung an der Universität Bielefeld. Sie studierte das Lehramt für Grund- und Hauptschulen an der Universität Osnabrück, arbeitete zehn Jahre lang als Lehrerin an Grundschulen in Hannover und promovierte 2011 bei Klaus Hasemann an der Leibniz Universität Hannover. Ihr Forschungsschwerpunkt liegt in der Erforschung mathematischer Lernprozesse mit besonderem Fokus auf Muster- und Strukturkompetenzen von Kindern im Elementarbereich und in der Primarstufe.

Timo Maßmann ist seit 2022 Grundschullehrer in den Fächern Deutsch, Mathe sowie Sport und unterrichtet derzeit an einer Schule des gemeinsamen Lernens. Er absolvierte sein Studium an der Universität Bielefeld und war dort parallel als wissenschaftliche Hilfskraft an der Beratungsstelle für Kinder mit Rechenschwierigkeiten tätig. Im Rahmen seiner Abschlussarbeit untersuchte er die Bedeutung von Vorläuferfähigkeiten bei der Entstehung von Rechenschwierigkeiten. Für „Welt der Zahl“ ist er seit 2022 als Autor an der Erstellung des Forderhefts beteiligt.

Prof. Dr. Marcus Nührenbörger ist Professor für Didaktik der Mathematik mit dem Schwerpunkt Inklusion an der Universität Münster. Von 2009 bis 2022 war er Professor für Didaktik der Mathematik an der TU Dortmund. Er hat Lehramt Primarstufe studiert und 2002 an der Universität Münster über Verstehensprozesse von Kindern beim Messen von Längen promoviert. Zwischenzeitlich war er als (abgeordnete) Lehrkraft an Grundschulen und an der Universität Duisburg-Essen tätig. Seine Forschungsschwerpunkte zielen auf Diagnose und Förderung sowie auf individuelle und kollaborative Lernprozesse im inklusiven Mathematikunterricht.

Wibke Patsch ist Sonderpädagogin im Gemeinsamen Lernen und seit 2022 Fachberaterin für Mathematik in der Primarstufe im Kreis Gütersloh. In dieser Rolle arbeitet sie eng mit den Schulen der Region zusammen, um den Austausch von Best Practices zu fördern und ein Netzwerk für die kontinuierliche Verbesserung der Mathematikbildung zu schaffen. Sie engagiert sich seit 2014 im Fortbildungsprojekt „Prävention von Rechenschwierigkeiten (PReSch)".

Dr. Monika Rammert ist Diplom-Psychologin und seit 2012 Co-Leiterin der Bildungs- und Schulberatung im Kreis Gütersloh. Seit 2014 leitet sie gemeinsam mit Sevinç Sunar (Regionale Schulberatung Bielefeld) das Kooperationsprojekt „Prävention von Rechenschwierigkeiten (PReSch)". Ihre Expertise im Umgang mit Rechenschwierigkeiten setzt sie als Lerntherapeutin und in Fortbildungsveranstaltungen für Lehrkräfte im Rahmen ihrer schulpsychologischen Tätigkeit und am Zentrum für Hochschulbildung Dortmund ein.

Mia Lene Ransiek hat 2021 das Studium Grundschullehramt mit integrierter Sonderpädagogik und den Fächern Mathematische Grundbildung, Sprachliche Grundbildung sowie Sportwissenschaften an der Universität Bielefeld aufgenommen und schloss den Bachelor im Februar 2024 ab. Seit April 2024 führt sie diesen Studiengang im Master fort. Während ihres Bachelorstudiums absolvierte sie ein Auslandssemester am University College South Denmark (Esbjerg). Im Rahmen der Bachelorarbeit arbeitete sie an der Entwicklung des Projekts zum Vergleich des Einflusses der deutschen und dänischen Zahlwortbildung auf das Stellenwertverständnis mit.

Prof. Dr. Sebastian Rezat ist Professor für Mathematikdidaktik an der Universität Paderborn. Nach dem ersten und zweiten Staatsexamen für das Lehramt an Gymnasien in den Fächern Mathematik und Musik promovierte er an der Justus-Liebig-Universität Gießen zur Nutzung des Mathematikschulbuches durch Lernende. Die Dissertation wurde von der Gesellschaft für Didaktik der Mathematik mit dem Förderpreis ausgezeichnet. Neben der Schulbuchforschung gehören das algebraische Denken am Übergang von der Grundschule zu Sekundarstufe und die Förderung literaler Kompetenzen im Mathematikunterricht zu seinen Forschungsschwerpunkten. Gemeinsam mit Andrea Peter-Koop und Mathias Hattermann gab er den Band „Transformation – A fundamental idea of matheamtics education“ heraus.

Prof. Dr. Benjamin Rott hat 2012 in Hannover promoviert und forscht und lehrt, nach Stationen als Postdoc und Juniorprofessor in Freiburg bzw. Essen, seit 2017 als Professor für Mathematik und ihre Didaktik an der Universität zu Köln. Seine Forschungsschwerpunkte sind u. a. das mathematische Problemlösen und Problem Posing, Überzeugungen und Beliefs sowie Lehrkräfteprofessionalisierung.

Prof. Dr. Thomas Rottmann ist Professor am Institut für Didaktik der Mathematik an der Universität Bielefeld. Nach seinem Studium des Lehramts für die Primarstufe und dem anschließenden Referendariat hat er promoviert und arbeitet in der Lehre und Forschung in der Mathematikdidaktik für das Grundschullehramt. Zusammen mit Andrea Peter-Koop leitet er die Beratungsstelle für Kinder mit Rechenschwierigkeiten an der Universität Bielefeld. Zusätzlich ist er Autor und Herausgeber für das Lehrwerk „Welt der Zahl“.

Prof. Dr. Holger Schäfer lehrt und forscht am Institut für Förderpädagogik der Universität Koblenz und ist Lehrbeauftragter am Institut für Sonderpädagogik der Pädagogischen Hochschule Heidelberg. Er war langjährig als Förderschullehrer, Fachleiter und Schulleiter tätig und ist Mitherausgeber der Fachzeitschrift „Lernen konkret“ und der Praxisreihe „Schule und Unterricht bei intellektueller Beeinträchtigung“ sowie Herausgeber der Studienreihe „Schule – Unterricht – Behinderung“. Seine Arbeitsschwerpunkte liegen in den Bereichen ganzheitliche und geistige Entwicklung, inklusive Diagnostik sowie (Mathematik-)Unterricht bei geistiger und komplexer Behinderung.

Prof. Dr. Petra Scherer ist Professorin für Didaktik der Mathematik an der Fakultät für Mathematik der Universität Duisburg-Essen. Sie ist seit mehr als 30 Jahren in der Lehrkräfteaus- und -fortbildung tätig. Zu ihren Forschungsschwerpunkten gehören u. a. Lernschwierigkeiten bzw. Lernschwächen im Mathematikunterricht, Konzepte für den inklusiven Mathematikunterricht sowie die Professionalisierung von Lehrkräften in Aus- und Fortbildung.

Jana Schiffer ist wissenschaftliche Mitarbeiterin in der Arbeitsgruppe von Marcus Nührenbörger am Institut für grundlegende und inklusive mathematische Bildung (GIMB) der Universität Münster. Nach dem Studium für das Lehramt an Grundschulen an der TU Dortmund von 2014 bis 2019 und dem anschließenden Referendariat am ZfsL Hamm arbeitet sie seit 2021 in Forschungsprojekten zum inklusiven Mathematikunterricht.

Dr. Julia Streit-Lehmann ist Oberstudienrätin im Hochschuldienst am Institut für Didaktik der Mathematik an der Universität Bielefeld und hat 2021 bei Andrea Peter-Koop im Bereich Frühe mathematische Förderung promoviert. Ihre weiteren Arbeitsschwerpunkte sind Diagnostik und Förderung bei Rechenschwierigkeiten sowie hochschuldidaktische Themen. Sie engagiert sich seit 2013 in der Region OWL in der Fortbildung von Lehrkräften und sozialpädagogischen Fachkräften zum Thema Rechenschwierigkeiten und war Mitautorin der Neuauflage des EMBI „Zahlen und Operationen".

Yasmin Theile hat an der Universität zu Köln Lehramt an Grundschulen studiert. Seit 2022 arbeitet sie als wissenschaftliche Mitarbeiterin am Institut für Mathematikdidaktik an der Universität zu Köln und promoviert zu Lehrkräfte-Feedback im problemorientierten Unterricht der Primarstufe.

Ben Weiß ist abgeordnete Lehrkraft in der Arbeitsgruppe von Christoph Selter am Institut für Entwicklung und Erforschung des Mathematikunterrichts (IEEM) der Technischen Universität Dortmund. Nach der Ausbildung für das Lehramt an Grundschulen und einer berufsbegleitenden Ausbildung für das Lehramt für sonderpädagogische Förderung arbeitet er seit 2022 in Forschungsprojekten zum Mathematikunterricht.

Prof. em. Dr. Bernd Wollring lehrte Didaktik der Mathematik an der Universität Kassel und hatte mehrjährige Lehraufträge an der Universität Bielefeld. Mit Andrea Peter-Koop verbinden ihn eine langjährige Kooperation zum Entwickeln mathematischer Lernumgebungen und zur mathematikdidaktischen Diagnostik für die Grundschule sowie die gemeinsame Konzeption des EMBI auf der Basis der Entwicklungen von Doug Clarke von der ACU Melbourne.